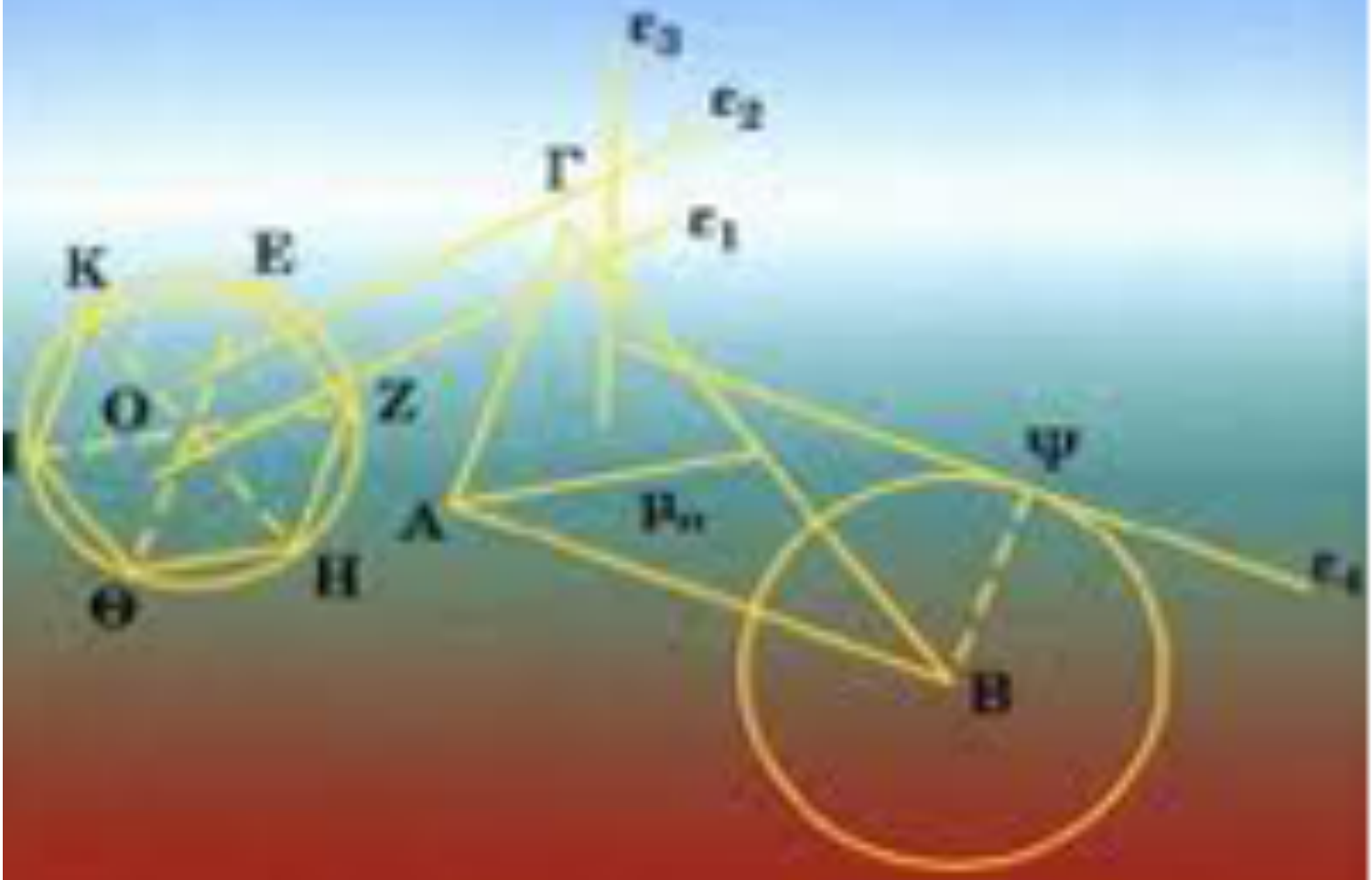
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

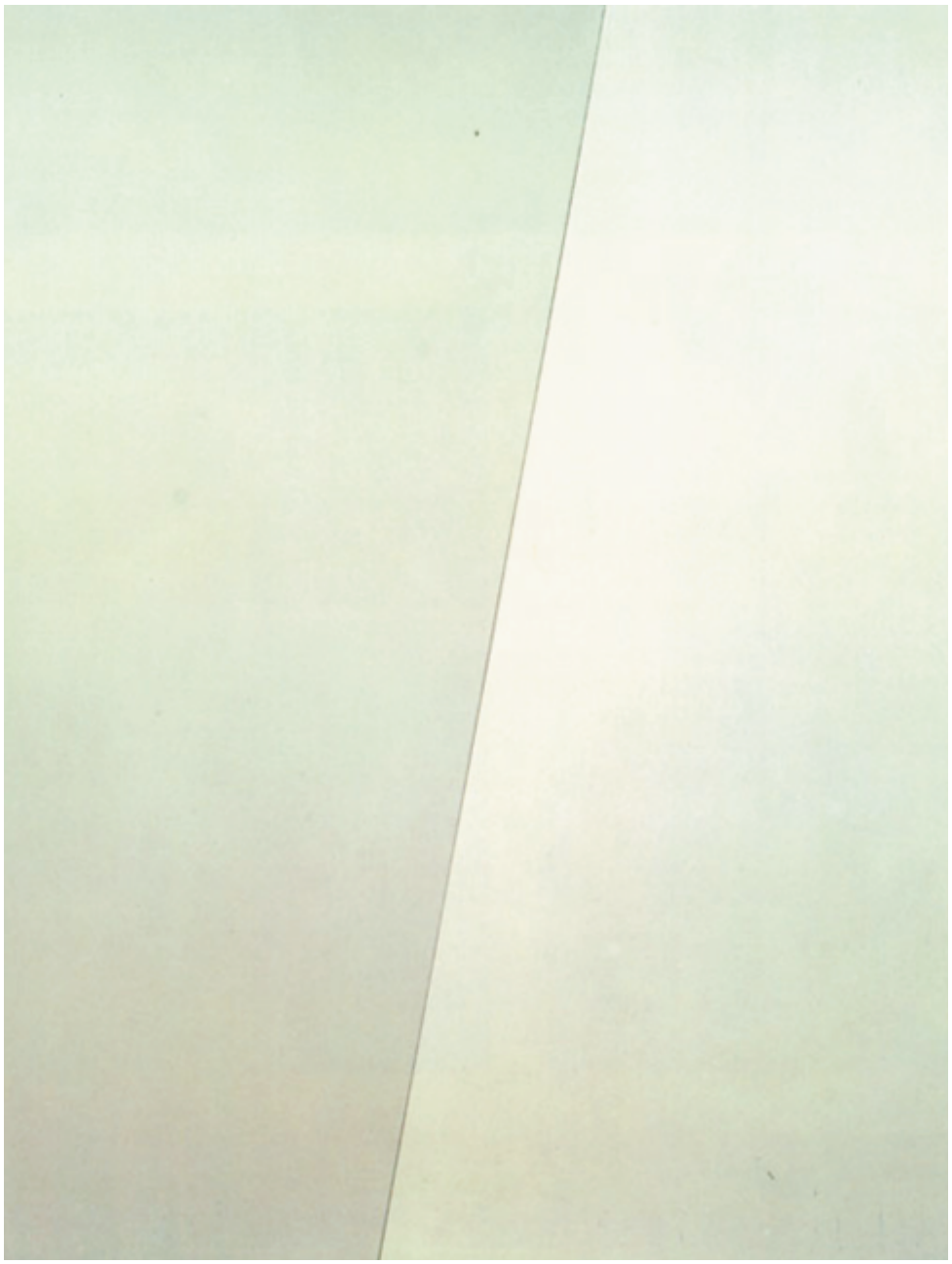
Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία



Ellsworth Kelly (Αμερικανός, 1923).
«Γκρι πανό 2»
2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974.

1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες,** τις **γραμμές** και τα **σημεία.** Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου και, περί το 440 π.Χ., τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής

των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόνζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόνζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρημάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Andrea Mantegna (Ιταλός, περίπου 1431 - 1506).
Οροφή από την *"Camera degli Sposi"* (Δωμάτιο των Συζύγων),
τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι , στη Μάντοβα της Ιταλίας.

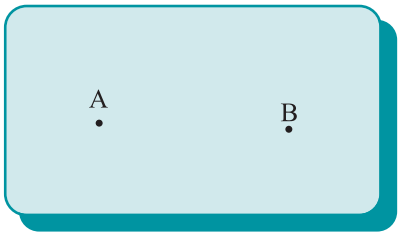
Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

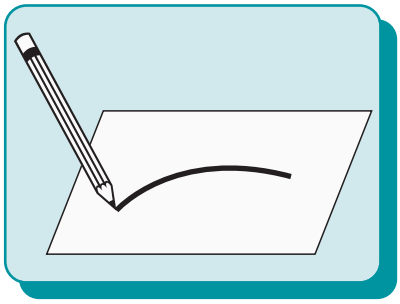
2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

Ένα ***σημείο*** δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).



Σχήμα 1

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία ***γραμμή*** (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.



Σχήμα 2

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

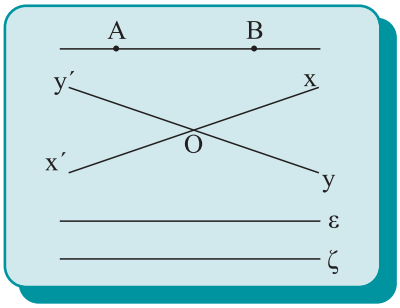
Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την ***επιφάνειά*** του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το ***επίπεδο***.

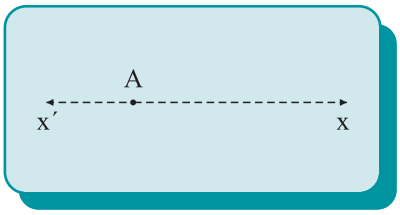
2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το ***επίπεδο***. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου.

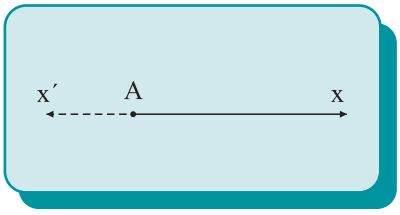
Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται ***επίπεδα σχήματα.***



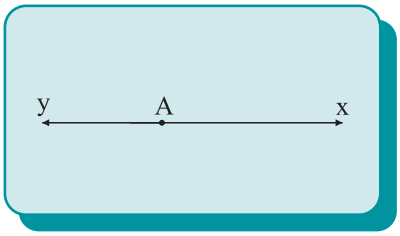
Σχήμα 3



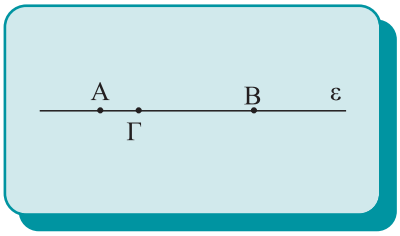
Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Σημείωση:
Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα ΑΒ, θα εννοούμε προς το μέρος του Β, ενώ το ΒΑ προς το μέρος του Α.

2.3 Η ευθεία

Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία Α,Β διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία ΑΒ ή ΒΑ (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα (ε,ζ,...) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως x΄x.
Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται ***τεμνόμενες*** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται ***τομή*** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες.***

Το ευθύγραμμο τμήμα

2.4 Η ημιευθεία

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία x΄x και σημείο της Α (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax΄ και τα ονομάζουμε ***ημιευθείες*** με ***αρχή*** το σημείο Α.

Η ευθεία x΄x λέγεται ***φορέας*** της ημιευθείας Ax (σχ.5).
Δύο ημιευθείες Ax, Ay με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους Α, όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται ***αντικείμενες*** (σχ.6).

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία Α,Β. ***Ευθύγραμμο τμήμα*** ΑΒ ή ΒΑ (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.
Τα σημεία Α και Β λέγονται ***άκρα*** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται ***φορέας*** του τμήματος. Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ (σχ.7), λέμε ότι τα Α,Β βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** του Γ, ενώ τα Β,Γ είναι ***προς το ίδιο μέρος*** του Α. Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται ***διαδοχικά.***

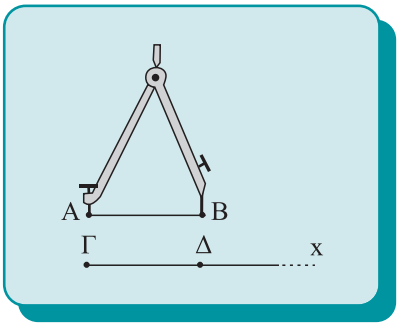
2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί **να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.**
Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται ***ομόλογο*** (ή ***εικόνα***) του αρχικού.

2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

• Ίσα ευθύγραμμα τμήματα

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ = ΓΔ (σχ.8).
Άμεση συνέπεια του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.



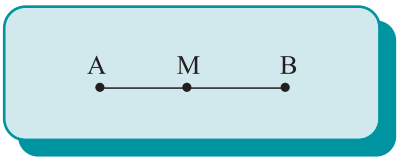
Σχήμα 8

• Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο
Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η ημιευθεία Γx. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο Γ, οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της Γx (σχ.8). Τότε το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το αρχικό.

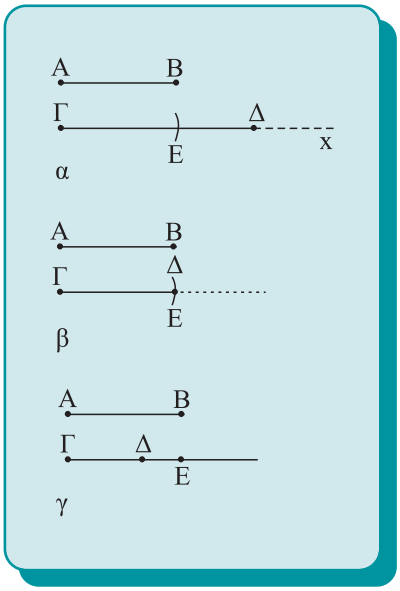
• Γεωμετρικές κατασκευές
Η παραπάνω διαδικασία λέγεται ***γεωμετρική κατασκευή*****.** Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα ***γεωμετρικά όργανα,*** δηλαδή τον ***κανόνα*** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το ***διαβήτη.***

• Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

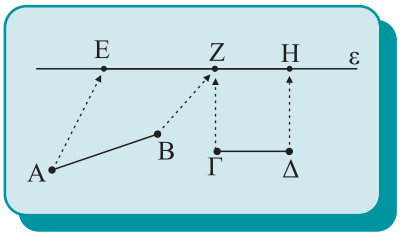
Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΑΜ=ΜΒ (σχ.9).
Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.



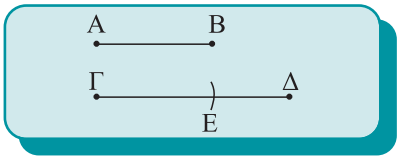
Σχήμα 9



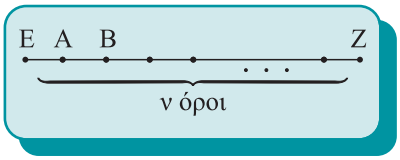
Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 13

• Άνισα ευθύγραμμα τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΓΔ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx. Μετατοπίζουμε το ΑΒ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο Ε της Γx, ώστε ΑΒ=ΓΕ.

• Αν το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ<ΓΔ (σχ. 10α).

• Αν το Ε ταυτίζεται με το Δ, τότε ΑΒ=ΓΔ, όπως προηγούμενα (σχ.10β).

• Αν το Ε δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ>ΓΔ (σχ.10γ).

2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.

(i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα ΕΖ=ΑΒ και ΖΗ=ΓΔ (σχ.11). Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα ΕΗ, που λέγεται ***άθροισμα*** των ΑΒ και ΓΔ και γράφουμε **ΕΗ=ΑΒ+ΓΔ**. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***πρόσθεση*** δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).

(ii) Αν ΑΒ<ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΓΕ=ΑΒ (σχ.12). Το τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ και συμβολίζεται **ΕΔ=ΓΔ–ΑΒ**.

(iii) Αν ν φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται ***γινόμενο*** του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, το οποίο είναι το άθροισμα ν διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ (σχ.13). Γράφουμε

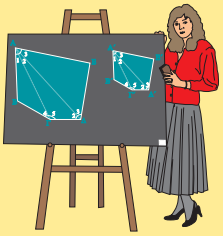
$$\mathbf{EZ = \nu \cdot AB} \text{ ή ισοδύναμα } \mathbf{AB = \frac{EZ}{\nu}}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Αν ΑΒ=ΓΔ, τότε η διαφορά ΓΔ–ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.*

Δραστηριότητα

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:



i) ΑΒ+ΓΔ =ΓΔ+ΑΒ ***(αντιμεταθετική)***

ii) (ΑΒ+ΓΔ) +ΕΖ = ΑΒ+(ΓΔ +ΕΖ) ***(προσεταιριστική)***.

2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων

• Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

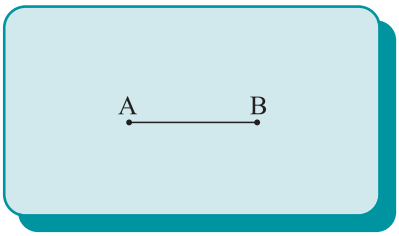
Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται ***μονάδα μήκους***. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε ΓΔ = ρΑΒ. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται ***μήκος*** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα με ΑΒ, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

• Απόσταση δύο σημείων

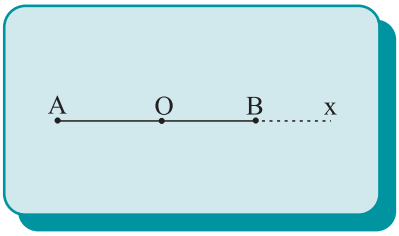
Έστω δύο σημεία Α,Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται ***απόσταση*** των σημείων Α και Β.



Σχήμα 14

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Ox να πάρουμε τμήμα ΟΒ = ΟΑ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται ***συμμετρικό*** του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται ***συμμετρικά*** σημεία ως προς ***κέντρο συμμετρίας*** το σημείο Ο. Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.



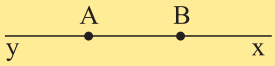
Σχήμα 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

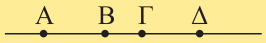
1. *Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:*
i) κανένα κοινό σημείο *ii) ένα κοινό σημείο*
iii) δύο κοινά σημεία *iv) άπειρα κοινά σημεία*
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:*
i) με αρχή το Α,
ii) με αρχή το Β.

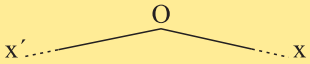


Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

3. *Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.*



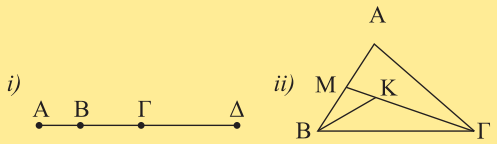
4. *Οι ημιευθείες Ox΄ και Ox του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;*



5. *Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:*



2. *Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε: i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών, ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.*

3. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.*

4. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $EZ = \dfrac{A\Delta + B\Gamma}{2}$, *ii)* $A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

2. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:*

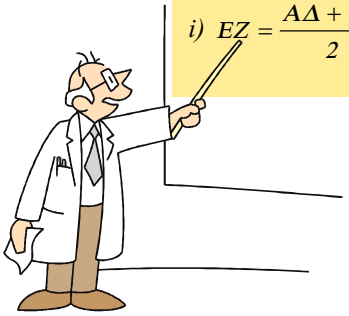
i) $\Gamma M = \dfrac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$, *ii)* $\Delta M = \dfrac{\Delta A + \Delta B}{2}$.

3. *i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α,Β,Γ, ισχύει ΑΒ ≤ ΑΓ+ΓΒ.*
ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι ΑΔ ≤ ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ.

Σύνθετα θέματα

1. *Αν Α,Β,Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

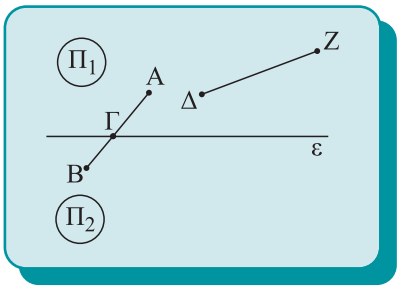
2. *Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους (ν ≥ 2).*



Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:
Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη Π_1 και Π_2, τα οποία βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** αυτής.



Σχήμα 16

Τα σημεία του Π_1, μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ***ημιεπίπεδο***.

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το Π_1 συμβολίζεται και (ε,Α). Όμοια το Π_2 συμβολίζεται (ε,Β).

Για τα ημιεπίπεδα Π_1 και Π_2 δεχόμαστε ότι:

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

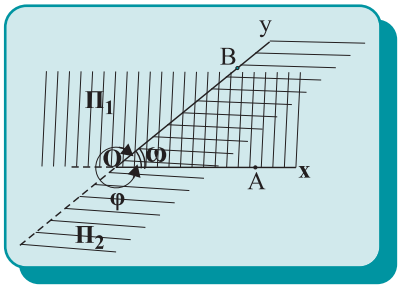
Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται **μεταξύ** των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).

2.12 Η γωνία

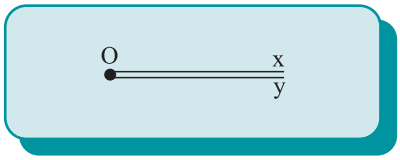
Από τυχαίο σημείο Ο ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα.
Έστω σημεία Α, Β των ημιευθειών Ox, Oy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) λέγεται ***κυρτή γωνία*** με ***κορυφή*** Ο και ***πλευρές*** Ox και Oy.
Συμβολίζεται με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της.
Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Ox και Oy λέγεται ***μη κυρτή γωνία*** με κορυφή Ο και πλευρές Ox και Oy.
Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εσωτερικό*** της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται ***εξωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εξωτερικό*** της γωνίας.
Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Ox και Oy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

- Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Ox (σχ.18) και η κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται ***μηδενική γωνία***, ενώ η μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται ***πλήρης γωνία.***
- Αν οι ημιευθείες Ox, Oy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται ***ευθεία γωνία.***

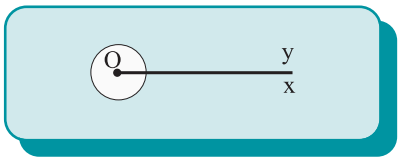
Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.



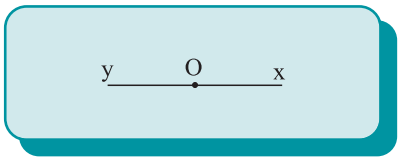
Σχήμα 17



Σχήμα 18



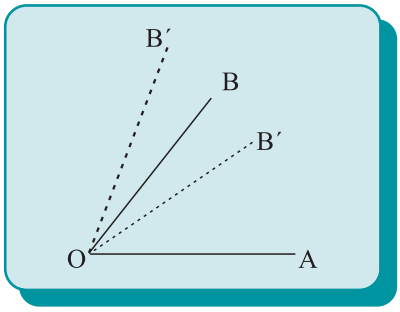
Σχήμα 19



Σχήμα 20

2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή Ο, την OA κοινή πλευρά και τις OB, OB′ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της OA (σχ.21α). Τότε:
(i) Αν οι πλευρές OB και OB′ συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B = A\hat{O}B'$.
(ii) Αν η πλευρά OB′ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' < A\hat{O}B$.
(iii) Αν η πλευρά OB′ βρίσκεται εκτός της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' > A\hat{O}B$.
Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\Gamma\hat{K}\Delta$ έτσι ώστε, η κορυφή



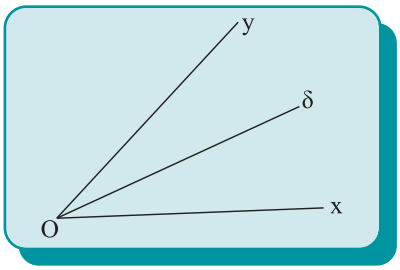
Σχήμα 21α

της Κ να ταυτισθεί με το Ο και η μία της πλευρά ΓΚ να συμπέσει με την πλευρά ΟΑ της γωνίας $A\hat{O}B$.
Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

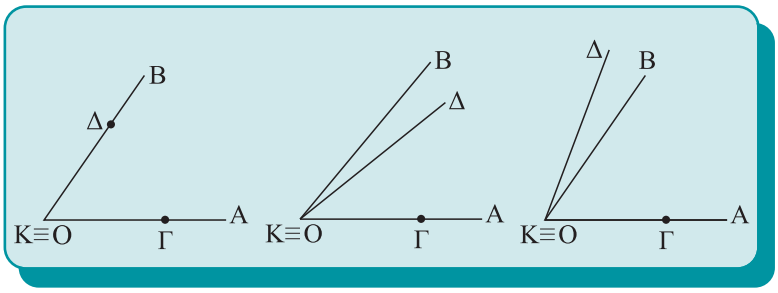
• Αν η πλευρά ΚΔ συμπίπτει με την ΟΒ, τότε οι γωνίες είναι ίσες: $A\hat{O}B = \Gamma\hat{K}\Delta$ (σχ.21β)

• Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μικρότερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta < A\hat{O}B$ (σχ.21γ).

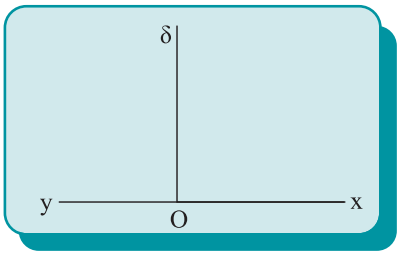
• Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta > A\hat{O}B$ (σχ.21δ).



Σχήμα 22



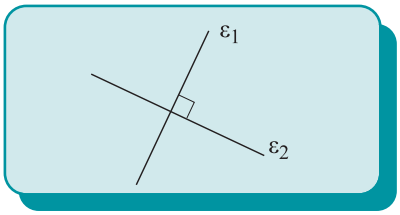
Σχήμα 21β *Σχήμα 21γ* *Σχήμα 21δ*



Σχήμα 23

Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ.22).
Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

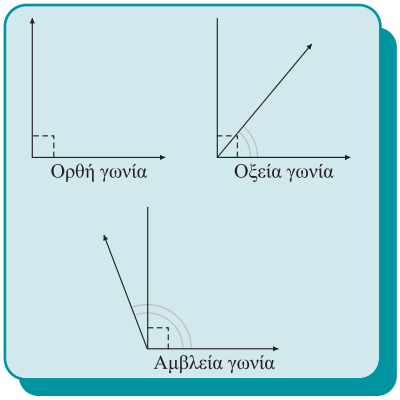


Σχήμα 24

Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και Οδ η διχοτόμος της (σχ.23).
Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται ***ορθή*** γωνία, και θα τη συμβολίζουμε ∟.
Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες ***κάθετες*** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ.24).

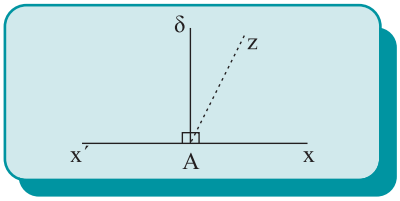
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***οξεία*** αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται ***αμβλεία*** αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).



Σχήμα 25

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

Ας θεωρήσουμε ευθεία x΄x και ένα σημείο Α (σχ.26).
Αν το Α είναι σημείο της ευθείας και Αδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x\hat{A}x'$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $A\delta \perp x'x$.



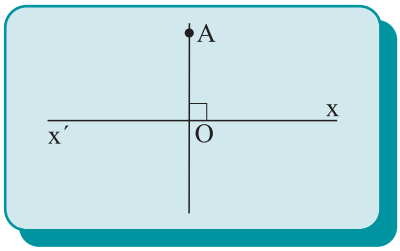
Σχήμα 26

Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Az (σχ.26), διαφορετική της Αδ, είναι κάθετη στην xx΄, τότε θα είναι $x\hat{A}z = z\hat{A}x' = 1\angle$, δηλαδή η Az είναι διχοτόμος της $x\hat{A}x'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.

Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το Α δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §.3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.

Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος ΑΟ που άγεται από το σημείο Α στην ευθεία x΄x λέγεται ***απόσταση*** του σημείου Α από την ευθεία x΄x (σχ.27).



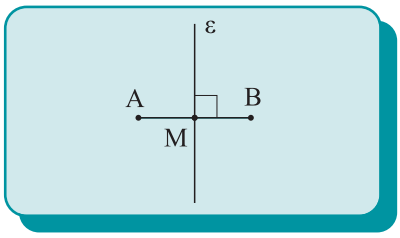
Σχήμα 27

ΣΧΟΛΙΟ
Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο Α της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Αδ υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη x΄x (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $x'\hat{A}x$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

- **Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος – Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα**

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται ***μεσοκάθετος*** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.28).

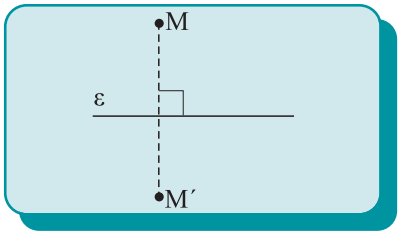


Σχήμα 28

Τα σημεία Α, Β λέγονται ***συμμετρικά*** ως προς την ευθεία ε. Η ευθεία ε λέγεται ***άξονας συμμετρίας***.

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου Μ ως προς μια ευθεία ε, φέρουμε το κάθετο τμήμα από το Μ προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο Μ΄ της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του Μ (σχ.29).

Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.

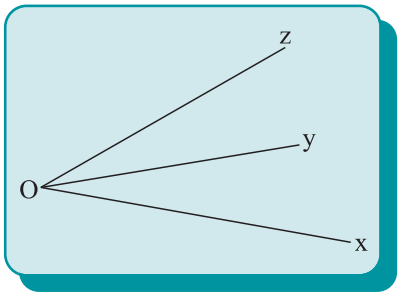


Σχήμα 29

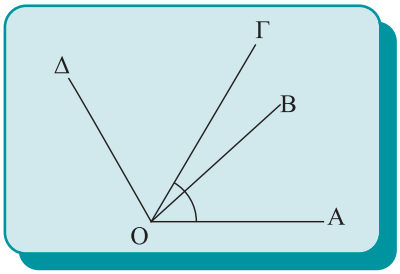
2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

- **Εφεξής γωνίες**

Δύο γωνίες λέγονται ***εφεξής***, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ (σχ.30) είναι εφεξής.



Σχήμα 30



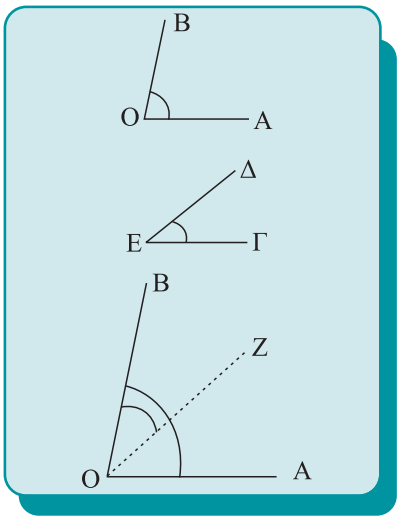
Σχήμα 31

Η γωνία $A\hat{O}B$ (σχ. 31) είναι εφεξής με τη $B\hat{O}Γ$, και η $B\hat{O}Γ$ είναι εφεξής με τη $Γ\hat{O}Δ$. Οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$, $Γ\hat{O}Δ$ λέγονται ***διαδοχικές***.

• Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

(i) ***Άθροισμα*** δύο εφεξής γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ λέγεται η γωνία $A\hat{O}Γ$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31).

Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ. $A\hat{O}Δ = A\hat{O}B+B\hat{O}Γ+Γ\hat{O}Δ$ (σχ.31).

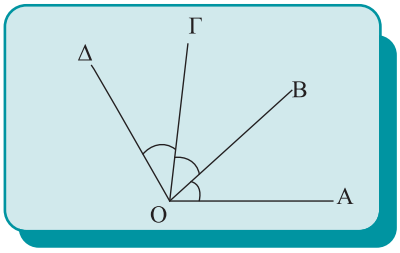


Σχήμα 32

(ii) Έστω $A\hat{O}B > Γ\hat{E}Δ$ (σχ.32). Μετατοπίζουμε τη γωνία $Γ\hat{E}Δ$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπέσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $A\hat{O}B$ (σχ.32). Η γωνία $Z\hat{O}B$ λέγεται ***διαφορά*** της γωνίας $Γ\hat{E}Δ$ από την $A\hat{O}B$ και συμβολίζεται $A\hat{O}B–Γ\hat{E}Δ$. Είναι φανερό ότι $Γ\hat{E}Δ+Z\hat{O}B = A\hat{O}B$.

Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.

(iii) ***Γινόμενο*** της γωνίας $A\hat{O}B$ επί το φυσικό αριθμό ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με $A\hat{O}B$.



Σχήμα 33

Γράφουμε $\nu \cdot A\hat{O}B = \underbrace{A\hat{O}B + A\hat{O}B + ... + A\hat{O}B}_{\nu\ \text{όροι}}$,

π.χ. $A\hat{O}Δ = A\hat{O}B+B\hat{O}Γ+Γ\hat{O}Δ = 3A\hat{O}B$ ή ισοδύναμα

$A\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}Δ}{3}$ (σχ.33).

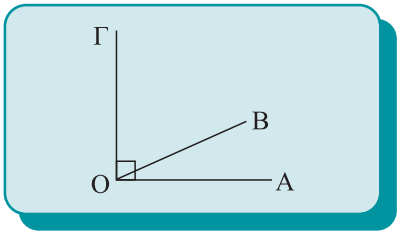
2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

• Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***συμπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***συμπλήρωμα*** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.



Σχήμα 34

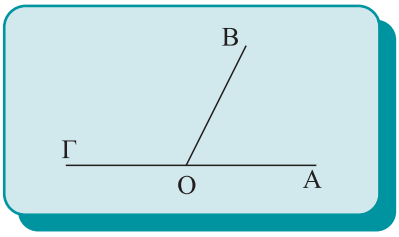
• Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***παραπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***παραπλήρωμα*** της άλλης (σχ.35).

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

Θεώρημα

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.



Σχήμα 35

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}Γ$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}Γ$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι παραπληρωματικές.

ΣΧΟΛΙΟ

Αντίστροφα Θεωρήματα *λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:*

Ευθεία Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.*

Αντίστροφη Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.*

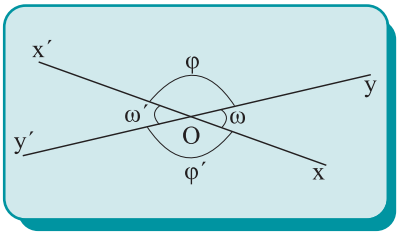
• Κατακορυφήν γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***κατακορυφήν***, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

Θεώρημα Ι

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



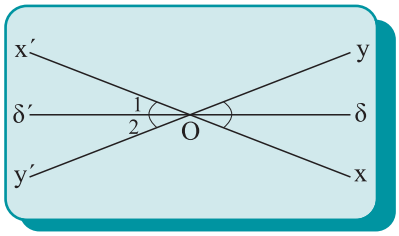
Σχήμα 36

Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.

Θεώρημα ΙΙ

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.



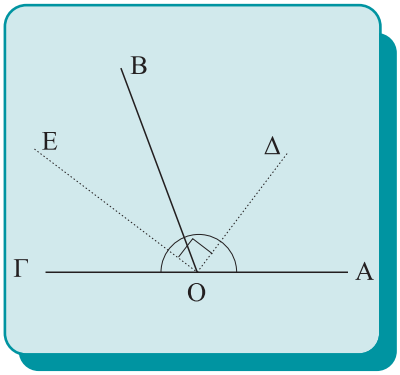
Σχήμα 37

Απόδειξη

Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος Οδ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.

Αν Οδ΄ είναι η προέκταση της Οδ, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν) .

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ΄ είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.



Σχήμα 38

Θεώρημα ΙΙΙ

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).

Τότε $A\hat{O}B+B\hat{O}\Gamma = 2\angle$ ή $2\Delta\hat{O}B+2B\hat{O}E = 2\angle$ ή $\Delta\hat{O}B+B\hat{O}E = 1\angle$ ή $\Delta\hat{O}E = 1\angle$. Άρα $O\Delta \perp OE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

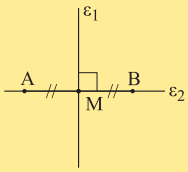
1. *Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:*

i) την ευθεία ε_1,

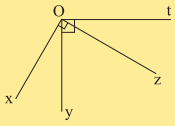
ii) την ευθεία ε_2,

iii) το σημείο Μ.

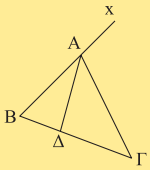
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



2. *Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.*



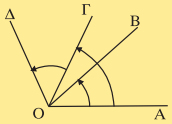
3. *Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.*



4. *i) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εφεξής;*

ii) Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ είναι διαδοχικές;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



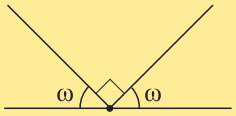
5. *Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}t$, ώστε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$.*

Να δικαιολογήσετε ότι $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

2. *Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος.*



3. *Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;*

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.*

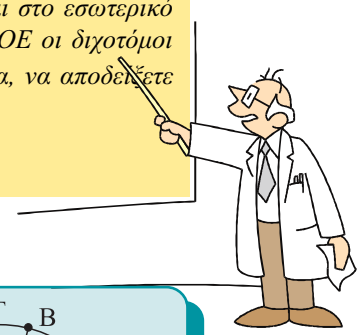
2. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A+\Gamma\hat{O}B}{2}$.

3. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A-\Gamma\hat{O}B}{2}$.

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta+B\hat{O}\Gamma}{2}$.

2. *Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\Delta\hat{O}E = \dfrac{1}{2}\llcorner$.



Κύκλος

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).

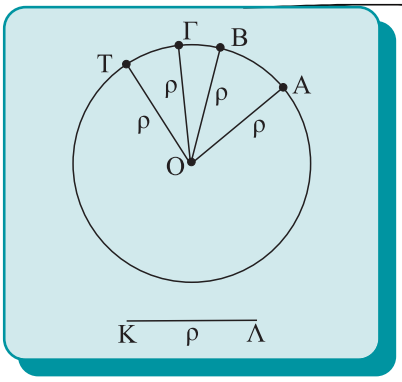
Κύκλος με ***κέντρο*** Ο και ***ακτίνα*** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα ΟΜ , όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου.

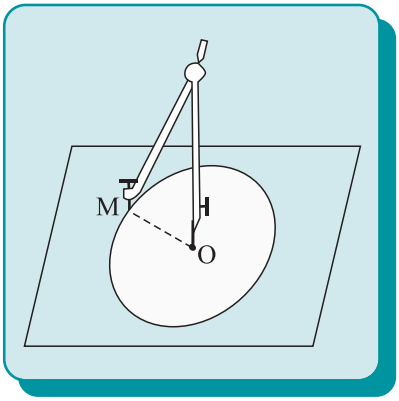
Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο,ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει ΟΜ=ρ. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται ***γεωμετρικός τόπος***.

Έτσι ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.



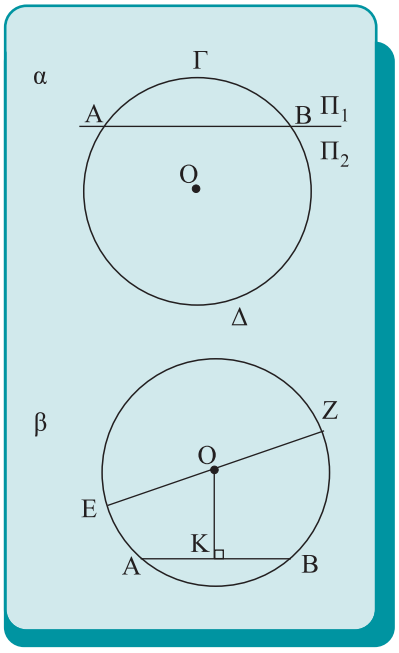
Σχήμα 39



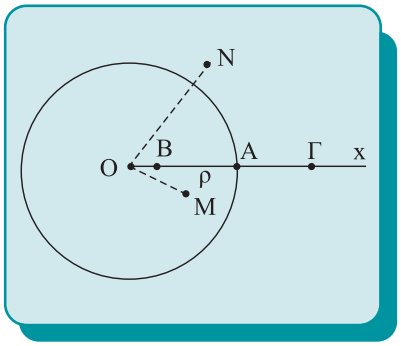
Σχήμα 40

• Τόξα - Χορδές

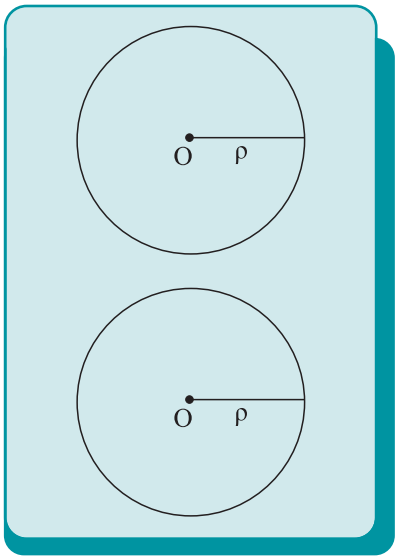
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο Π_2.



Σχήμα 41



Σχήμα 42



Σχήμα 43

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται ***τόξο*** του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό από τα άκρα του λέγεται ***εσωτερικό σημείο*** του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα Α και Β, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα Α,Β συμβολίζονται με $\overset{\frown}{AΓB}$ το ένα και με $\overset{\frown}{AΔB}$ το άλλο.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α,Β ενός τόξου λέγεται ***χορδή*** του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.

Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται ***απόστημα*** της χορδής.

Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται ***διάμετρος*** του κύκλου.

Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται ***αντιδιαμετρικά*** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ. 41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.

Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό**.

• Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ) και μία ημιευθεία Ox που τον τέμνει στο σημείο Α. Για κάθε σημείο Β (σχ.42) της ακτίνας ΟΑ, διαφορετικό του Α ισχύει ΟΒ<ρ, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της ΟΑ ισχύει ΟΓ>ρ. Τα σημεία Β,Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Γενικά, ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.42) λέγεται ***εσωτερικό*** σημείο του κύκλου, όταν ΟΜ<ρ, ενώ ένα σημείο Ν λέγεται ***εξωτερικό*** του κύκλου, όταν ΟΝ>ρ.

• Ίσοι κύκλοι

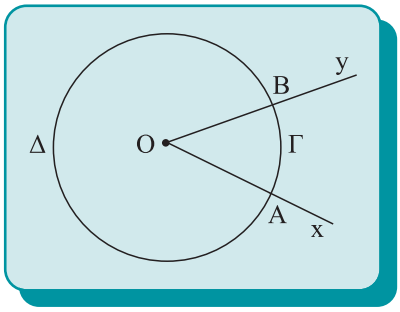
Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται ***επίκεντρη*** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $Α\hat{O}Β$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$.



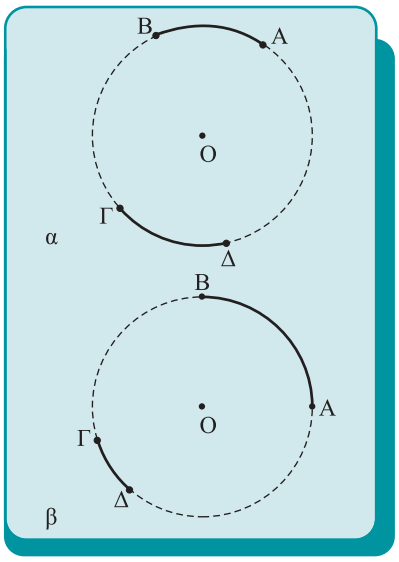
Σχήμα 44

• Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$ (σχ.45α).

Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ (ή το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$) και γράφουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} > \overset{\frown}{ΓΔ}$, όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{ΑΒ}$ (σχ.45β).



Σχήμα 45

Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

• Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

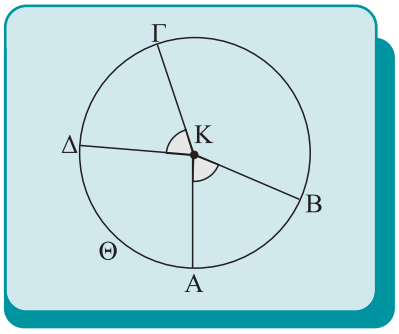
Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

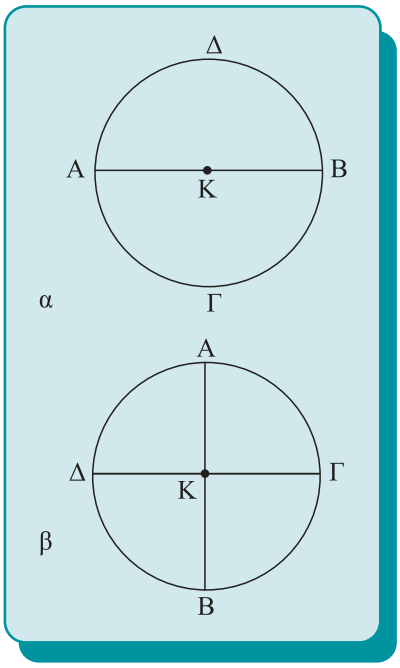
Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $Α\hat{K}Β$ και $Γ\hat{K}Δ$ είναι ίσες.



Σχήμα 46

Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\Gamma\hat{K}\Delta$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $A\hat{K}B$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 47

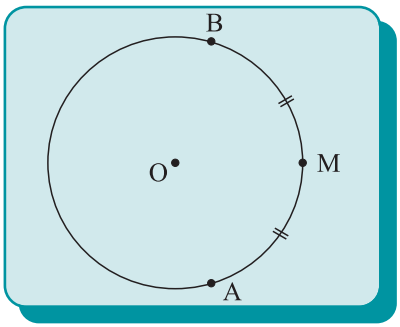
Πορίσματα

(i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

(ii) Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

(iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ και $\overset{\frown}{B\Delta A}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (Κ) από την διάμετρο του ΑΒ, λέγεται ***ημικύκλιο***, ενώ το καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma B}$, $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρείται από τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, λέγεται ***τεταρτοκύκλιο***.



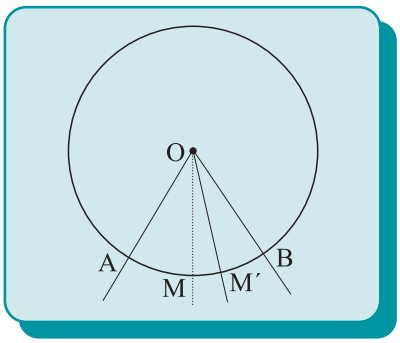
Σχήμα 48

• Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο Μ ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.48) λέγεται ***μέσο*** του, όταν τα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{MB}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

Θεώρημα ΙΙ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.



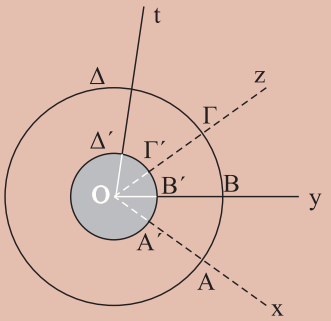
Σχήμα 49

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του (σχ.49). Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}M$ και $M\hat{O}B$ είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το Μ΄, τότε η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $z\hat{O}t$ του διπλανού σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (O,R) και (O,R΄) με R΄<R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).



Σχ. 50

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο,ρ) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;*

2. *Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;*

3. *Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;*

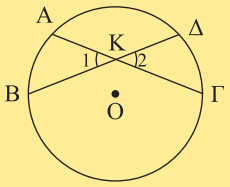
4. *Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;*

5. *Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α,Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;*

6. *Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας – ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;*

7. *Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;*

8. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;*

2. *Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο,ρ) και (Ο, R) με R>ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).*

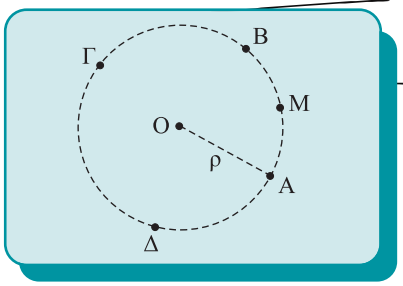
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ) με R>ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.*

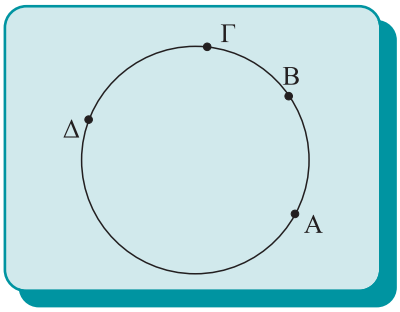
2. *Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.*

2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται ***διαδοχικά***, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι



Σχήμα 51

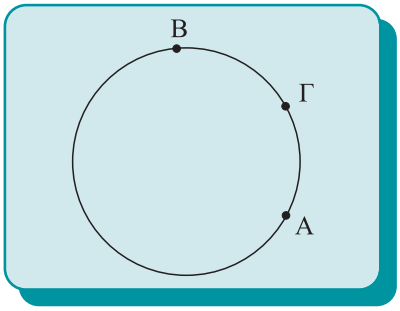


Σχήμα 52

διαδοχικό με το επόμενό του, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι διαδοχικές.

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ λέγεται άθροισμα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma}$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι ίσο με το $\overset{\frown}{AB}$, τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ συμβολίζεται με $2\,\overset{\frown}{AB}$ και λέγεται διπλάσιο του $\overset{\frown}{AB}$. Όμοια ορίζεται και το $\nu\cdot\overset{\frown}{AB}$, όπου ν φυσικός.

Αν για δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου ισχύει $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \nu\overset{\frown}{AB}$, τότε το $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ένα ***ν-οστό του*** $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

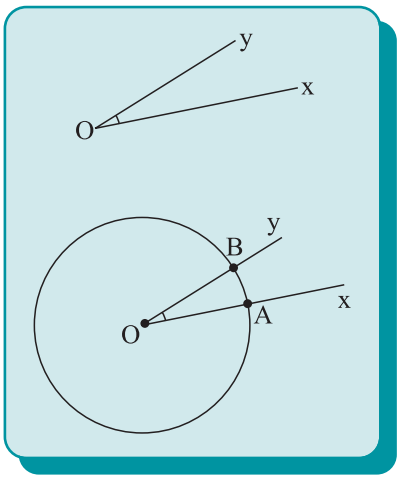


Σχήμα 53

Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην § 3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.

Αν $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A\Gamma}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους Α, τότε το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma B}$ λέγεται διαφορά του $\overset{\frown}{A\Gamma}$ από το $\overset{\frown}{AB}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A\Gamma}$. Όταν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$, τότε η διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο $\overset{\frown}{0}$.

Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης.. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας ***μοίρας*** που ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1°. Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται ***μέτρο*** του τόξου.



Σχήμα 54

Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60΄) και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60΄΄).

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (Ο, ρ), και έστω $\overset{\frown}{AB}$ το τόξο στο

οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως ***μέτρο*** της γωνίας $x\hat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Το μέτρο της $x\hat{O}y$ το συμβολίζουμε με $(x\hat{O}y)$ ή απλά $x\hat{O}y$.

Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90°, 180° και 360°.

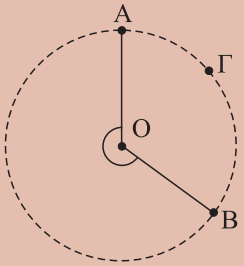
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου Ο, θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ (σχ.55), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{B\Gamma} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$.

Να υπολογισθούν:

(i) τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$,

(ii) τα μέτρα των γωνιών $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$.



Σχήμα 55

Λύση

(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2\overset{\frown}{\Gamma A}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ προκύπτει ότι $9\overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ ή $\overset{\frown}{\Gamma A} = 40°$. Άρα $\overset{\frown}{AB} = 240°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$.

(ii) Η $A\hat{O}B$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\overset{\frown}{AB}$, επομένως $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 240°$ (μη κυρτή). Όμοια $B\hat{O}\Gamma = 80°$ και $\Gamma\hat{O}\Delta = 40°$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

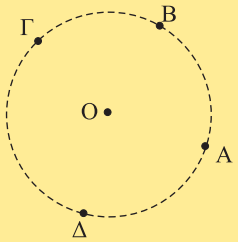
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:*

i) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$,

ii) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

iii) $\overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.



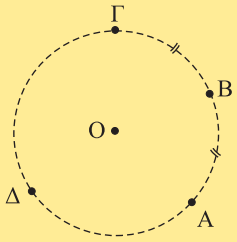
2. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:*

i) $2\overset{\frown}{AB}$,

ii) $2\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

iii) $2\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$,

iv) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.



3. *Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:*

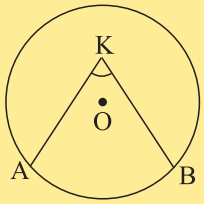
α. αρνητικός β. μηδέν γ. θετικός δ. μη αρνητικός.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. *Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;*

5. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = \mu°$ *(παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία* $A\hat{K}B$ *θα είναι* $\mu°$;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.*
i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB})$.
ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$, να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B})$.

2. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$. Να βρείτε τα μέτρα:*
i) των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma B}$,
ii) των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

3. *Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.*

4. *Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

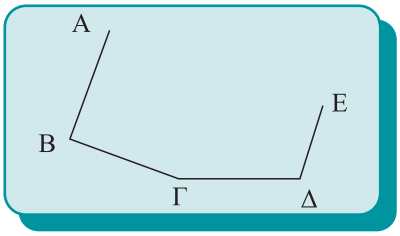
1. *Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.*

2. *Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.*

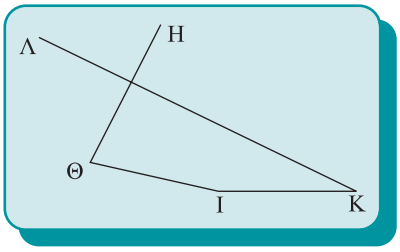
3. *Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.*

Ευθύγραμμα σχήματα

2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου



Σχήμα 56



Σχήμα 57

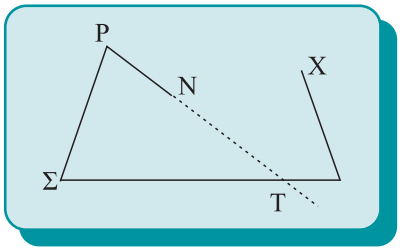
Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή*** ή απλά ***τεθλασμένη***. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ΑΒΓΔΕ.

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε λέγονται ***κορυφές*** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές Α και Ε λέγονται ***άκρα*** της. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται ***πλευρές*** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται ***περίμετρος*** της τεθλασμένης.

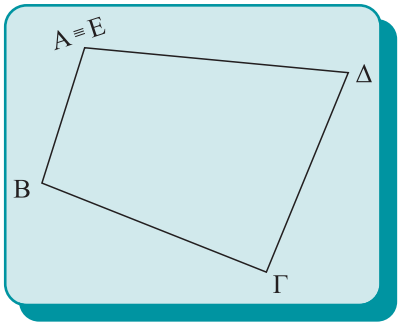
Μία τεθλασμένη λέγεται ***απλή***, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο. Έτσι, η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η ΗΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.

Μία τεθλασμένη λέγεται ***κυρτή***, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του,

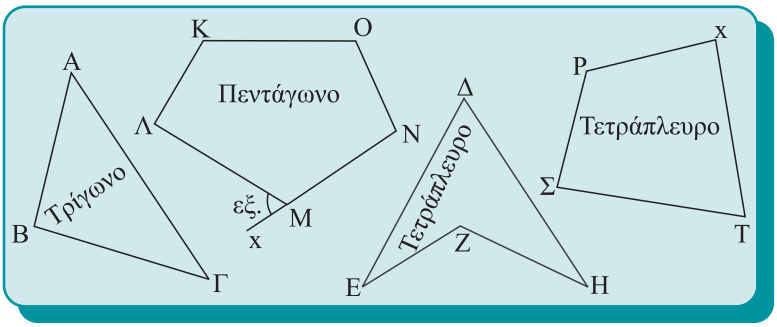
διαφορετικά λέγεται ***μη κυρτή***. Έτσι η γραμμή ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι κυρτή, ενώ οι ΗΘΙΚΛ (σχ.57) και ΝΡΣΤΧ (σχ.58) είναι μη κυρτές.
Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται ***κλειστή***, π.χ. η ΑΒΓΔΕ, όπου το Α ταυτίζεται με το Ε (σχ.59).
Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται ***πολύγωνο***.
Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το πολύγωνο λέγεται ***κυρτό***, ενώ αν είναι μη κυρτή, το πολύγωνο λέγεται ***μη κυρτό***.



Σχήμα 58

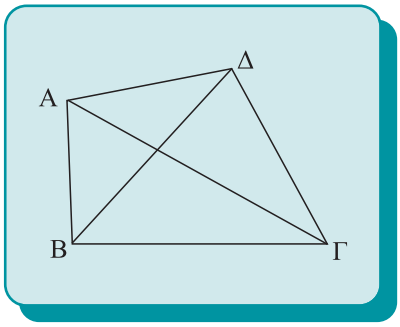


Σχήμα 59



Σχήμα 60

Για παράδειγμα, τα πολύγωνα ΑΒΓ (σχ.60) και ΚΛΜΝΟ (σχ.60) είναι κυρτά, ενώ το ΔΕΖΗ (σχ.60) είναι μη κυρτό. Το πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται ***τρίγωνο*** (σχ.60), με τέσσερις ***τετράπλευρο*** (σχ.60), με πέντε ***πεντάγωνο*** (σχ.60) και γενικά με ν, ***ν-γωνο***. Στο εξής λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κύρτο πολύγωνο.
Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου λέγεται ***διαγώνιος*** του πολυγώνου. Έτσι τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.61).



Σχήμα 61

Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του. Σε ένα κυρτό πολύγωνο τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών τους λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία του πολυγώνου και αποτελούν το ***εσωτερικό*** του πολυγώνου.
Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίσουμε, αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου, π.χ. η γωνία $\Lambda\hat{M}x$ (σχ. 60) είναι εξωτερική γωνία του πενταγώνου ΚΛΜΝΟ και συμβολίζεται $\hat{M}_{\varepsilon\xi}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ώστε* $AB < \frac{AΓ}{2}$, $BΓ < \frac{BΔ}{2}$ *και ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $EZ = \frac{AΔ - BΓ}{2}$.

2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ ,ΓΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.*

3. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι* $AE > \frac{AΓ}{2}$.

4. *Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε* $\widehat{AB} = 150°$, $\widehat{ΓΔ} = 45°$ *και* $\widehat{AΔ} = 105°$. *Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας* $B\hat{O}Γ$ *είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.*

5. *Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου* $\widehat{AB}$ *και Κ τυχαίο σημείο του τόξου* $\widehat{BM}$. *Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων* $\widehat{AK}$ *και* $\widehat{MK}$ *αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου* $\widehat{ΓΔ}$.

Δραστηριότητα

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.

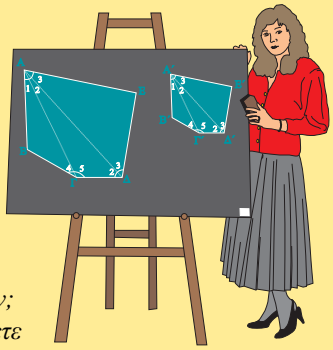
Εργασία

Να βρείτε το πλήθος δ των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου ως συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του (ν ≥ 3), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

i) Να κατασκευάσετε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο και να βρείτε:
α) το πλήθος των διαγωνίων με μια κοινή κορυφή,
β) το συνολικό πλήθος των διαγωνίων.

ii) Μπορείτε να «ανακαλύψετε» ποιος τύπος δίνει το δ ως συνάρτηση του ν;

iii) Υποθέστε ότι ο τύπος ισχύει για πολύγωνο με ν πλευρές και να αποδείξετε ότι ισχύει για πολύγωνο με ν+1 πλευρές. ***Υπόδειξη:*** *Προσθέστε μια κορυφή και βρείτε το πλήθος των επιπλέον διαγωνίων.*



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και ορίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία και κύκλο. Τέλος, δώσαμε την έννοια της τεθλασμένης γραμμής και του πολυγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α, Β ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ΑΒ που είναι μεταξύ των Α, Β. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση τμημάτων, για το μέσο ενός τμήματος και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά του. Κατόπιν ορίσαμε πράξεις με τμήματα, την έννοια του μήκους ενός τμήματος και την απόσταση δύο σημείων.

Η γωνία ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία δύο ημιεπιπέδων. Στη συνέχεια μίλησαμε για σύγκριση γωνιών, για τη διχοτόμο μιας γωνίας και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά της. Κατόπιν ορίσαμε την έννοια της ορθής (καθεμία από τις γωνίες στις οποίες χωρίζεται η ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της), οξείας, αμβλείας γωνίας και της καθετότητας δύο ευθειών. Επίσης, ορίσαμε τις πράξεις με γωνίες και τις έννοιες συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες.

Ο κύκλος (Ο,ρ) ορίστηκε ως το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Ο, απόσταση ρ. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τόξα, χορδές και σύγκριση τόξων. Αποδείξαμε τη μοναδικότητα του μέσου ενός τόξου στηριζόμενοι στη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας και αξιοποιώντας τη βασική σχέση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο της. Τέλος, ορίσαμε το μέτρο τόξου και γωνίας (ως το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, όταν αυτή γίνει επίκεντρη σε κύκλο).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- **Πρωταρχικές έννοιες:** **σημείο, ευθεία, επίπεδο**
- **Ευθύγραμμο τμήμα**
  - **Σύγκριση τμημάτων**
  - **Μέσο τμήματος**
  - **Πράξεις με τμήματα**
  - **Μήκος τμήματος - Απόσταση σημείων**
- **Γωνίες**
  - **Σύγκριση γωνιών**
  - **Διχοτόμος γωνίας**
  - **Οξεία, ορθή, αμβλεία γωνία, κάθετες ευθείες**
  - **Πράξεις με γωνίες**
  - **Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες**
- **Κύκλος**
  - **Διάμετρος**
  - **Τόξα - χορδές, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου**
  - **Επίκεντρη γωνία και σχέση με το αντίστοιχο τόξο**
  - **Μέτρο τόξου και γωνίας**
- **Ευθύγραμμα σχήματα:** **τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο, στοιχεία πολυγώνου**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Από τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία το ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων. Για την επίλυση σχετικών ασκήσεων διακρίνουμε περιπτώσεις.
  (**Ασκήσεις:** §2.1 – 2.10 Αποδεικτικές 3, Σύνθετα 1)

- Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο Ο τότε ΟΑ=ΟΒ και ΟΓ=ΟΔ. Για να αποδείξουμε ότι δυο τμήματα έχουν κοινό μέσο, θεωρούμε το μέσο του ενός και αποδεικνύουμε ότι είναι μέσο και του άλλου τμήματος.
  (**Ασκήσεις:** Γενικές 2)

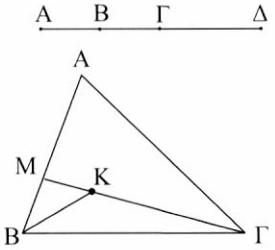
- Για να υπολογίσουμε την παραπληρωματική $\hat{\varphi}$ ή την συμπληρωματική $\hat{\theta}$ μιας γωνίας $\hat{\omega}$ θέτουμε: $\hat{\varphi} = 180^{\circ} - \hat{\omega}$ και $\hat{\theta} = 90^{\circ} - \hat{\omega}$.
  (**Ασκήσεις:** §2.19 Αποδεικτικές 1,2)

§ 2.1 - 2.10

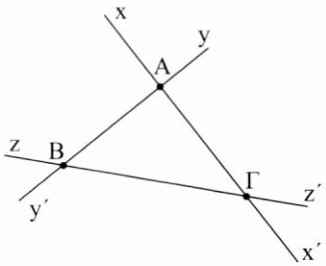
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Έξι ευθύγραμμα τμήματα τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, και ΓΔ.

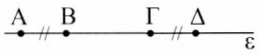
ii) Τα τμήματα που έχουμε στο σχήμα είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΜ, ΒΚ, ΒΓ, ΒΜ, ΓΚ, ΓΜ, ΜΚ και το ΑΚ που δεν είναι σχεδιασμένο.



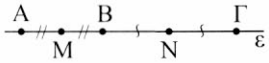
2. i) Τα σημεία τομής είναι τρία τα Α, Β, και Γ
ii) Ορίζονται τρία ευθύγραμμα τμήματα τα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και 12 ημιευθείες, οι εξής: Αx, Αx΄, Αy, Αy΄, Βy, Βy΄, Βz, Βz΄, Γx, Γx΄, Γz, Γz΄



3. Είναι ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΓΔ + ΒΓ = ΒΔ, αφού ΑΒ = ΓΔ

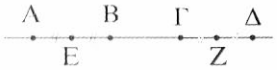


4. ΑΓ = ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ = 2ΜΒ + 2ΒΝ
= 2 (ΜΒ + ΒΝ) = 2ΜΝ, αφού ΑΜ = ΜΒ και ΒΝ = ΝΓ.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Έχουμε ΑΔ = ΑΕ + ΕΖ + ΖΔ και ΒΓ = ΕΖ – ΕΒ – ΓΖ, οπότε



$$AB + B\Gamma = 2EZ(AE = EB,\quad Z\Delta = \Gamma Z) \Leftrightarrow EZ = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

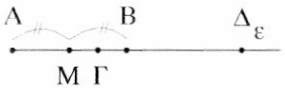
ii) Έχουμε ΑΓ + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΓ) + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΔ) + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ

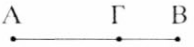
2. i) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma A = \Gamma M + MA \\ \Gamma B = MB - \Gamma M \end{array}\right\} \text{Άρα } \Gamma A - \Gamma B = 2\Gamma M(MA = MB) \Leftrightarrow \Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$$

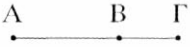
ii) Έχουμε $\left.\begin{array}{l}\Delta A = AM + \Delta M \\ \Delta B = \Delta M - BM\end{array}\right\}$

Αρα $\Delta A + \Delta B = 2\Delta M \Leftrightarrow \Delta M = \dfrac{\Delta A + \Delta B}{2}$

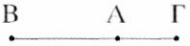


3. α) i) 

Αν το Γ είναι μεταξύ των Α και Β τότε ΑΒ=ΑΓ+ΓΒ

ii) 

Αν το Β είναι μεταξύ των Α και Γ τότε ΑΒ<ΑΓ, οπότε ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ

iii) 

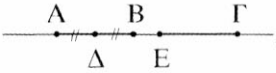
Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε ΑΒ<ΓΒ, οπότε ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ. Άρα πάντα έχουμε ΑΒ≤ΑΓ+ΓΒ

β) Για τα Α,Β,Γ ισχύει ΑΒ≤ΑΓ+ΓΒ (1) ενώ για τα Α, Β, Δ ισχύει ΑΔ≤ΑΒ+ΒΔ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι ΑΔ≤ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ

Σύνθετα Θέματα

1. i) Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε:

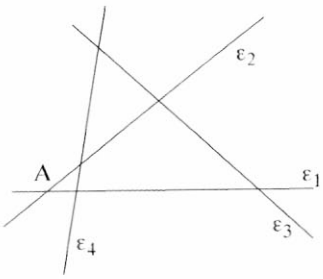
$$\Delta E = A\Delta + AE = \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB + A\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$$

ii) 

Αν το Α είναι στην προέκταση του ΒΓ π.χ. προς το μέρος του Β

τότε: $\Delta E = AE - A\Delta = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma - AB}{2} = \dfrac{B\Gamma}{2}$

2. Αν παραστήσουμε με ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 τις τέσσερις ευθείες οδούς αρκεί να βρούμε πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών. Σε κάθε μια ευθεία π.χ. την ε_1 οι άλλες (4-1)=3 ευθείες ορίζουν (4-1)=3 σημεία. Άρα συνολικά θα ορίζονταν 4(4-1)=12 σημεία. Αλλά κάθε σημείο το υπολογίσαμε 2 φορές π.χ. το Α ως σημείο της ε_1 και της ε_2. Άρα τελικά ορίζονται



$$\frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ σημεία.}$$

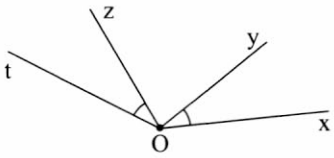
Επομένως χρειάζονται 6 τροχονόμοι. Όμοια οι ν ευθείες ορίζουν $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ σημεία.

§ 2.11 - 2.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

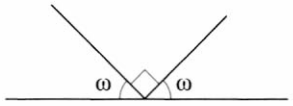
1. Έχουμε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$ ή

$x\hat{O}y + y\hat{O}z = y\hat{O}z + z\hat{O}t$. Άρα $x\hat{O}y = z\hat{O}t$



2. Είναι $\hat{\omega} + 1\,\text{ορθή} + \hat{\omega} = 2\,\text{ορθές}$, οπότε

$2\hat{\omega} = 1$ ορθή ή $\hat{\omega} = \frac{1}{2}$ ορθής



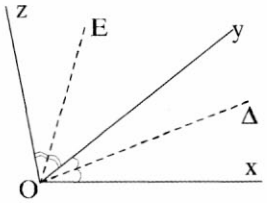
3. Όταν το ρολόι δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς οι δείκτες σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι δείκτες θα σχηματίζουν και πάλι ορθή γωνία μετά από 6 ώρες. Τότε το ρολόι δείχνει τρείς η ώρα ακριβώς.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ δύο εφεξής γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

Τότε $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y}{2} + \frac{y\hat{O}z}{2}$

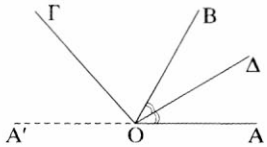
Άρα $\Delta\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2}$



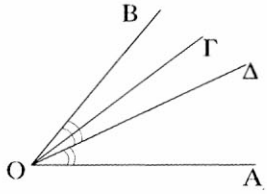
2. Έχουμε:
$$\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Gamma\hat{O}\Delta - \Delta\hat{O}B \end{aligned}\right\}$$

Άρα

$$\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \quad (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$



3. Έχουμε:
$$\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Delta\hat{O}B - \Gamma\hat{O}A \end{aligned}\right\} \text{ Άρα}$$

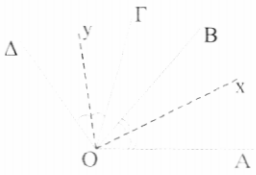


$$\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \quad (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$$

Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}\Delta = A\hat{O} \times + x\hat{O}y + y\hat{O}\Delta \\ B\hat{O}\Gamma = x\hat{O}y - B\hat{O}x - \Gamma\hat{O}y \end{array}\right\} \text{Αρα} \quad A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma = 2x\hat{O}y$$

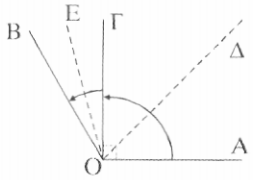


(γιατί $A\hat{O}x = B\hat{O}x$, $y\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}y$) $\Leftrightarrow$ $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$

2. Έχουμε:

$$\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Delta - B\hat{O}E = \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} =$$

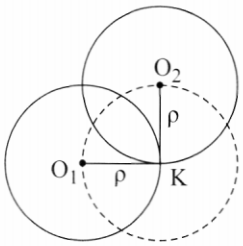
$$= \frac{A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{1}{2}\llcorner \ (O\Gamma \perp OA)$$



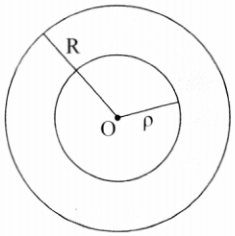
§ 2.17 - 2.18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Υπάρχουν άπειροι κύκλοι ακτίνας ρ που διέρχονται από το Κ. Τα κέντρα τους βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.



2. Τα σημεία που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο,R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο,ρ) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

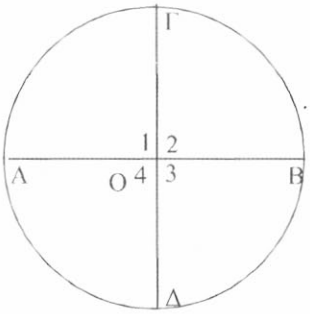
1. Επειδή η ε διέρχεται από το κοινό κέντρο Ο των κύκλων τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι διάμετροι αυτών με κοινό μέσον το Ο και επομένως έχουμε:

ΑΟ=ΟΔ και ΒΟ=ΟΓ.

Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη προκύπτει:
ΑΟ-ΒΟ=ΟΔ-ΟΓ ⇔ΑΒ=ΓΔ, σύμφωνα με το σχήμα. Επίσης έχουμε:

ΑΒ=ΓΔ⇔ ΑΒ+ΒΓ=ΒΓ+ΓΔ⇔ΑΓ=ΒΔ

2. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο διάμετροι ενός κύκλου (Ο, R) τέτοιες ώστε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Τότε η ΟΓ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $A\hat{O}B$, επομένως κάθε μια από τις $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ είναι ορθή γωνία. Η $\hat{O}_3$ ως κατακορυφήν της $\hat{O}_1$ είναι κι αυτή ορθή. Όμοια και η $\hat{O}_4$. Έτσι οι επίκεντρες γωνίες $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3$ και $\hat{O}_4$ είναι ίσες οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών είναι ίσα δηλαδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ και επειδή τα τόξα αυτά αποτελούν ολόκληρο τον κύκλο προκύπτει το ζητούμενο.



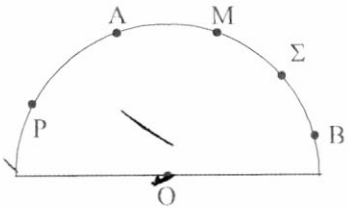
§ 2.19

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω ημικύκλιο, κέντρου Ο δύο σημεία Α, Β αυτού και το σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$

i) Για σημείο Ρ του ημικυκλίου, που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε: $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MB}$. Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ προκύπτει

$$\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB} = 2\overset{\frown}{PM} \Leftrightarrow \overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}).$$



ii) Έστω σημείο Σ του τόξου $\overset{\frown}{MB}$. Έχουμε (βλέπε σχήμα)

$\widehat{\Sigma A} = \widehat{\Sigma M} + \widehat{MA}$ και $\widehat{\Sigma B} = \widehat{MB} - \widehat{\Sigma M}$. Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη, λαμβάνοντας πάλι υπόψη ότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ προκύπτει: $\widehat{\Sigma A} - \widehat{\Sigma B} = 2\widehat{\Sigma M} \Leftrightarrow \widehat{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\widehat{\Sigma A} - \widehat{\Sigma B})$.

2. α) Είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{\Gamma B} = 80°$ και $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma B} = 180°$, από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε αντίστοιχα

$\overset{\frown}{A\Gamma} = 130°$ και $\overset{\frown}{\Gamma B} = 50°$

οπότε και $(\overset{\frown}{A\Gamma}) = 130°$, $(\overset{\frown}{\Gamma B}) = 50°$.

β) Η $A\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{A\Gamma}$, άρα $(A\hat{O}\Gamma) = (\overset{\frown}{A\Gamma}) = 130°$.
Όμοια $(B\hat{O}\Gamma) = 50°$.

3. Έστω $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ δύο συμπληρωματικές γωνίες με $\hat{\omega} = 2\hat{\phi}$. Πρέπει $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 90°$ ή $2\hat{\phi} + \hat{\phi} = 90°$ ή $3\hat{\phi} = 90°$. Άρα $\hat{\phi} = 30°$, οπότε $\hat{\omega} = 60°$

4. Είναι $\hat{\omega} = \frac{6}{5}$ ορθής $= \frac{6}{5} \cdot 90° = 108°$. Άρα η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ είναι $\hat{\phi} = 180° - 108° = 72°$. Η γωνία $\hat{\omega}$ δεν έχει συμπληρωματική, αφού είναι αμβλεία γωνία.

Αποδεικτικές ασκήσεις

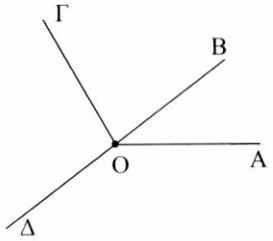
1. Έστω $\hat{\phi}$ η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ η συμπληρωματική της.
Τότε $\hat{\phi} = 180° - \hat{\omega}$, $\hat{\theta} = 90° - \omega°$ και $\hat{\phi} = 3\hat{\theta}$. Άρα $180° - \hat{\omega} = 3(90° - \hat{\omega})$ ή
ή $180° - \hat{\omega} = 270° - 3\hat{\omega}$ ή $2\hat{\omega} = 90°$. Άρα $\hat{\omega} = 45°$.

2. Έστω $\hat{\omega}$ η συμπληρωματική της $\hat{\phi}$. Τότε $\hat{\phi} = 90° - \hat{\omega}$ και $\hat{\phi} = \hat{\omega} - 20°$.
Άρα $90° - \hat{\omega} = \hat{\omega} - 20° \Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 110° \Leftrightarrow \hat{\omega} = 55°$
Άρα $\hat{\omega} = 55°$ και $\hat{\phi} = 35°$

3. Έχουμε $\frac{A\hat{O}B}{1} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \frac{\Delta\hat{O}A}{4}$. Θέτουμε

$$\frac{A\hat{O}B}{1} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \frac{\Delta\hat{O}A}{4} = \lambda, \text{ οπότε}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \lambda \\ B\hat{O}\Gamma = 2\lambda \\ \Gamma\hat{O}\Delta = 3\lambda \\ \Delta\hat{O}A = 4\lambda \end{array}\right\}$$ Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι



$$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A = 10\lambda \Leftrightarrow 360^\circ = 10\lambda$$

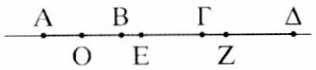
Άρα $\lambda = 36^\circ$

Επομένως

$A\hat{O}B = 36^\circ$, $B\hat{O}\Gamma = 2(36^\circ) = 72^\circ$, $\Gamma\hat{O}\Delta = 3(36^\circ) = 108^\circ$ και $\Delta\hat{O}A = 4(36^\circ) = 144^\circ$

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω Ο το μέσο του ΑΒ. Τότε ΕΖ=ΟΖ-ΟΕ (1)



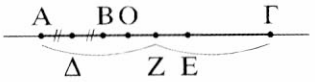
Αλλά

$$OZ = OB + BZ = \frac{AB}{2} + \frac{B\Delta}{2} = \frac{AB + B\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \quad (2) \text{ και}$$

$$OE = AE - AO = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $EZ = \dfrac{A\Delta - B\Gamma}{2}$

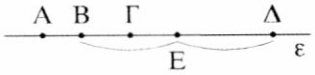
2. Έστω Ο το μέσο του ΒΖ. Τότε ΟΒ=ΟΖ.



Για να είναι το Ο μέσο και του ΔΕ αρκεί ΔΒ=ΖΕ (αφού ΟΒ=ΟΖ).

Πράγματι $ZE = Z\Gamma - E\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2} = \Delta B$

3. Έχουμε: $AE = AB + BE =$

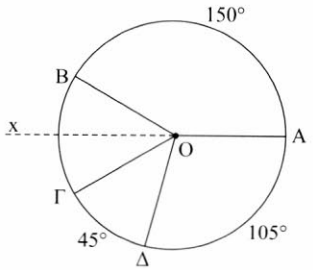


$$AB + \frac{B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} =$$

$$= \frac{AB + B\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2}$$

4. Έχουμε $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}+\overset{\frown}{\Delta A}=360°$, οπότε

$\overset{\frown}{B\Gamma}=360°-150°-105°-45°=60°$



Άρα οι επίκεντρες γωνίες είναι:

$A\hat{O}B=150°$ και $B\hat{O}\Gamma=60°$.

Επομένως

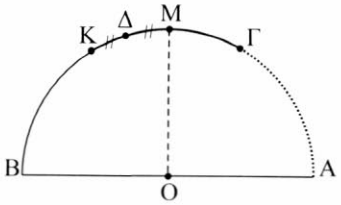
$A\hat{O}B+B\hat{O}x=A\hat{O}B+\dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2}\left(Ox \text{ διχοτόμος } B\hat{O}\Gamma\right)=150°+\dfrac{60°}{2}$ ή

$A\hat{O}B+B\hat{O}x=180°$, δηλαδή OA, Ox αντικείμενες ημιευθείες.

5. Αφού $\overset{\frown}{AB}$ ημικύκλιο και M μέσο $\overset{\frown}{AB}$, είναι

$\overset{\frown}{AM}=\dfrac{180}{2}=90°$.

Άρα



$\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{A\Delta}-\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{M\Delta}-\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{AM}+\dfrac{\overset{\frown}{MK}}{2}-\dfrac{\overset{\frown}{AK}}{2}$

$=\overset{\frown}{AM}-\left(\dfrac{\overset{\frown}{AK}}{2}-\dfrac{\overset{\frown}{MK}}{2}\right)=\overset{\frown}{AM}-\dfrac{\overset{\frown}{AM}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{AM}}{2}=\dfrac{90°}{2}=45°$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τρίγωνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσοκάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.

Ο Θησαυρός των Αθηναίων στους Δελφούς, 508 π.Χ.
Αναπαράσταση A. Tournaire

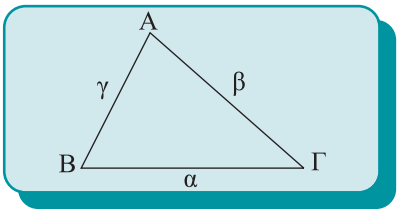
3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τρεις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$. Για ευκολία οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ με $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται ***κύρια στοιχεία*** του τριγώνου. Το άθροισμα α + β + γ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ. Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο.Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

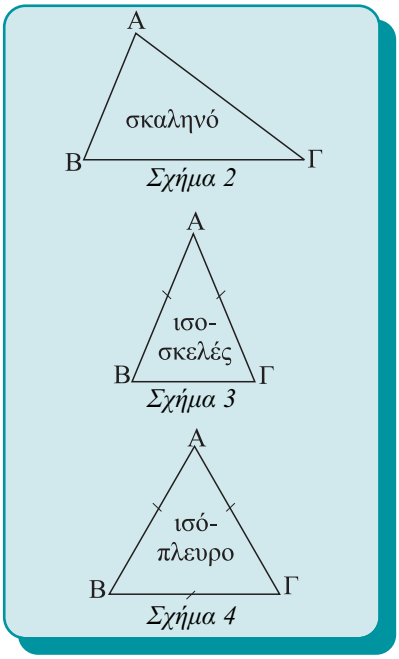
- ***σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- ***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του,
- ***ισόπλευρο***, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- ***οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- ***ορθογώνιο***, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα*** και οι άλλες δύο λέγονται ***κάθετες πλευρές*** του τριγώνου,
- ***αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).



Σχήμα 1

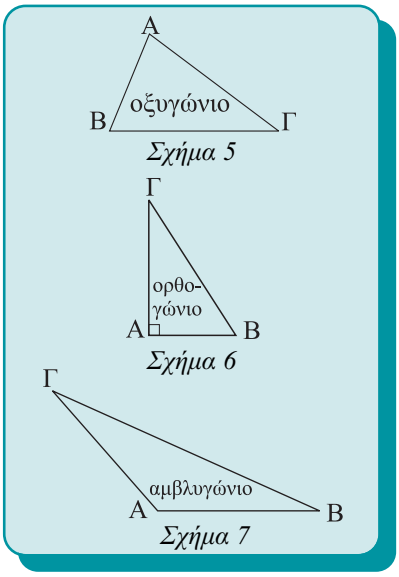


Σχήμα 2
Σχήμα 3
Σχήμα 4

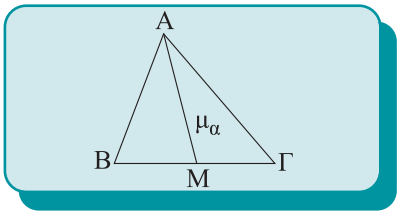
• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

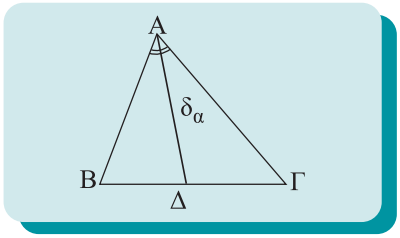
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



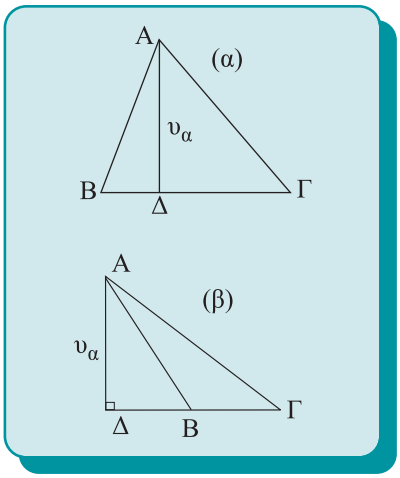
Σχήμα 5
Σχήμα 6
Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_α, υ_β και υ_γ.

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται ***προβολή*** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και ***ίχνος*** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται ***αντίστοιχες*** ή ***ομόλογες***.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

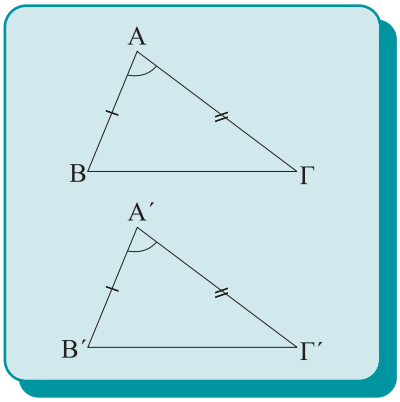
3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 11

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α′Β′Γ′, ώστε το σημείο Α′ να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α΄Β΄ να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α΄Γ΄ θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α′Β′ και ΑΓ = Α′Γ′, το σημείο Β′ ταυτίζεται με το Β και το Γ′ με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

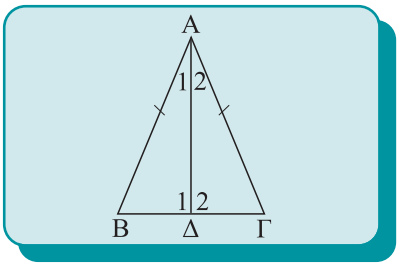
Πορισμα I

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ (σχ.12).
Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

Πορισμα II

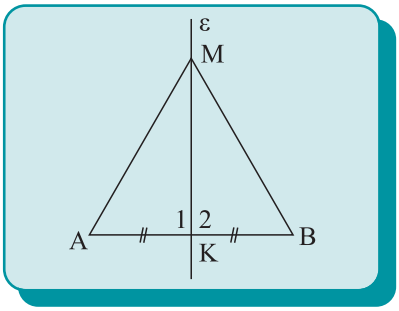
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Πορισμα III

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ=ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ.



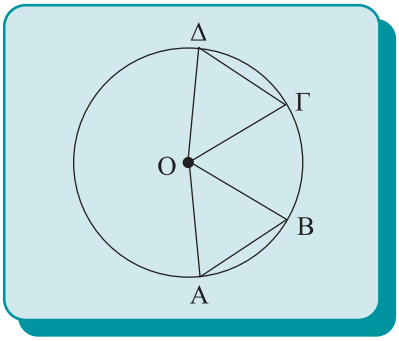
Σχήμα 13

Πορισμα IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

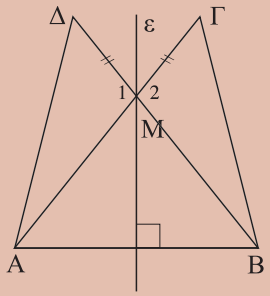
Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.14). Τότε είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
(i) $M\hat{A}B = M\hat{B}A$,
(ii) ΑΔ = ΒΓ.



Σχήμα 15

Λύση

(i) Επειδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ είναι ΜΑ = ΜΒ, επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

(ii) Τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΒΓ έχουν ΜΑ = ΜΒ, ΜΓ = ΜΔ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ, ώστε $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E$. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.*

2. *Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*

3. *Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.*

4. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα ΚΔ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.*

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.*

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Με τη βοήθεια του 1ου κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2ο και 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία πρός μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

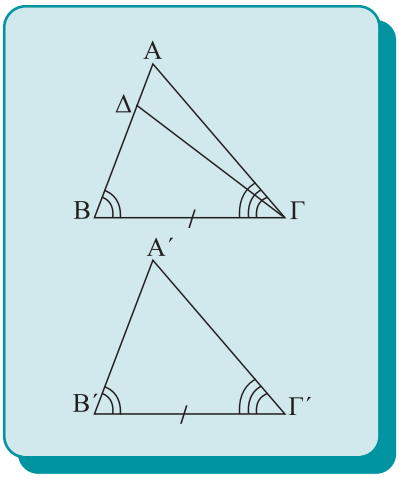
Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.16) έχουν ΒΓ = Β′Γ′, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και ΑΒ = Α′Β′. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α′Β′, π.χ. ΑΒ > Α′Β′. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην ΑΒ, ώστε να είναι ΒΔ = Β′Α′. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΔ = Β′Α′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}'$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α′Β′ , άρα ΑΒ = Α′Β′. Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ και Α′Β′Γ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΑΒ = Α′Β′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

* Σημείωση: *Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι (σελ. 36).*

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.



Σχήμα 16

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

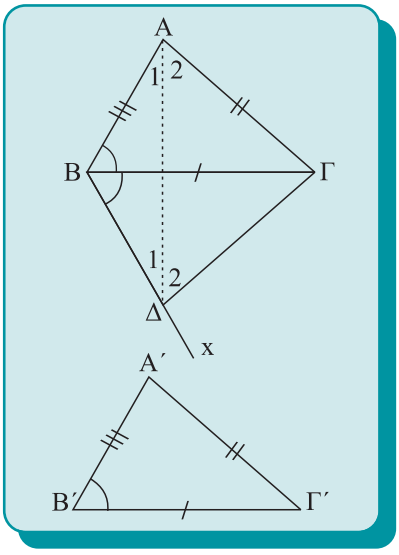
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΒΓ = Β′Γ′, ΓΑ = Γ′Α′ (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.

Θεωρούμε την ημιευθεία Βx, ώστε $\Gamma\hat{B}x = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ, ώστε ΒΔ = Α′Β′. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΔ = Α′Β′ και $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΓΔ = Γ′Α′ και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.



Σχήμα 17

Επειδή ΒΔ = Α′Β′ και Α′Β′ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού ΓΔ = Α′Γ′ και Α′Γ′ = ΑΓ, προκύπτει ότι

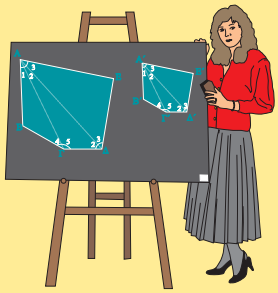
$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3ου Κριτηρίου:

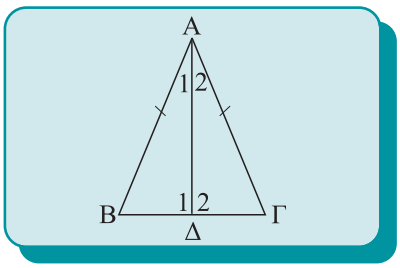
i) $\hat{B} > 90°$ *και* $\hat{B}' > 90°$.
ii) $\hat{B} = 90°$ *και* $\hat{B}' = 90°$.



Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

Πορισμα I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.



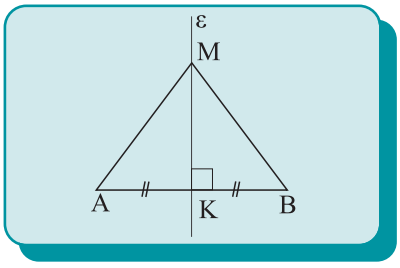
Σχήμα 18

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.

Πορισμα II

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.



Σχήμα 19

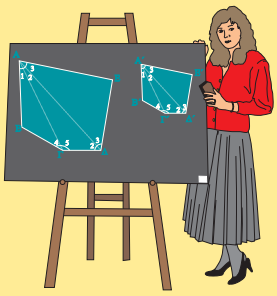
Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.**

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.

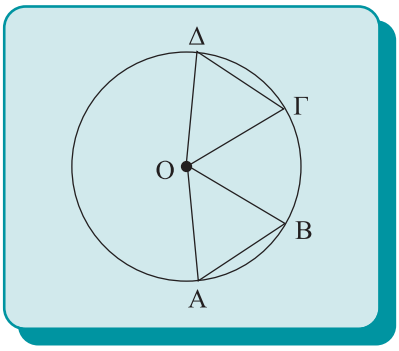


Πορισμα ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν: ΟΑ = ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ (= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 20

Πορισμα ΙΥ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και ΙΥ προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

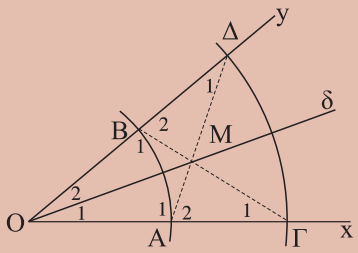
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),**
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),**
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (Ο,ρ), (Ο,R) με ρ<R (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:
(i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,
(ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,
(iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,
(iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ (= ρ), ΟΓ = ΟΔ(= R) και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.

(ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180° - \hat{A}_2 = 180° - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Επομένως, τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν ΑΓ = ΒΔ, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

(iii) Από το (ii) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ και ΟΜ κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.

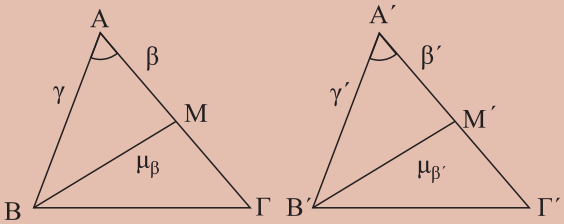
(iv) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ (σχ.22). Αυτά έχουν ΑΒ = Α΄Β΄, ΒΜ = Β΄Μ΄ (από την υπόθεση) και ΑΜ =Α΄Μ΄, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. *Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.*

3. *Συμπληρώστε τα κενά:*

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι .....

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι .....

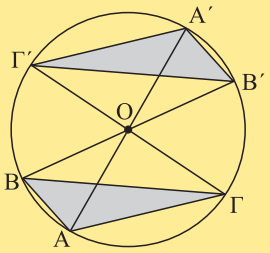
iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν .....

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν ....

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*

2. *Αν ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.*



3. *Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι΄ το σημείο τομής των διχοτόμων Α΄Δ΄ και Β΄Ε΄ του Α΄Β΄Γ΄ να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΔ = Α'Δ' και ΒΕ = Β'Ε'

ii) ΑΙ = Α'Ι' και ΒΙ = Β'Ι'.

2. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β΄, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

ii) α = α΄ και γ = γ΄.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.*

Σύνθετα θέματα

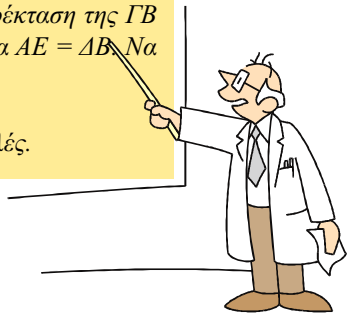
1. *Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α΄Μ΄ και η αντίστοιχη διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Θ΄. Να αποδείξετε ότι: i) ΒΔ = Β΄Δ΄, ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$, iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα, iv) ΑΘ = Α'Θ' και ΘΔ = Θ'Δ'.*

2. *Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.*

3. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.



3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

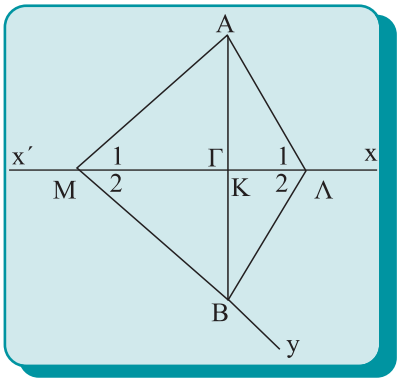
Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

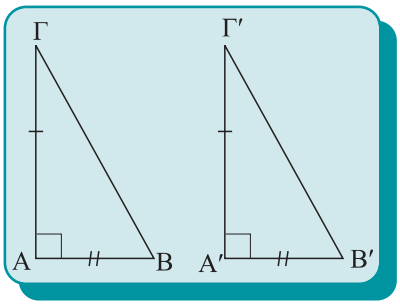
Απόδειξη

Έστω ευθεία x′x, σημείο Α εκτός αυτής και σημείο Μ της x′x (σχ.23). Αν η ΑΜ είναι κάθετη στην x′x, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η ΑΜ δεν είναι κάθετη στην x′x. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η x′x και δεν περιέχει το Α θεωρούμε την ημιευθεία My, ώστε να είναι $x\hat{M}y = A\hat{M}x$ και πάνω σε αυτή σημείο Β, ώστε ΜΑ = ΜΒ. Επειδή τα σημεία Α,Β είναι εκατέρωθεν της x′x, η x′x τέμνει την ΑΒ σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω Κ. Αφού ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η ΜΚ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ, άρα είναι και ύψος και επομένως ΑΒ⊥x′x.



Σχήμα 23

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ΑΛ κάθετη στην x′x . Τότε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΒΜΛ είναι ίσα, γιατί έχουν ΜΛ κοινή, ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90°$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90°$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία Α,Λ,Β είναι συνευθειακά, δηλαδή η ΑΛ ταυτίζεται με την ΑΚ, που είναι άτοπο.



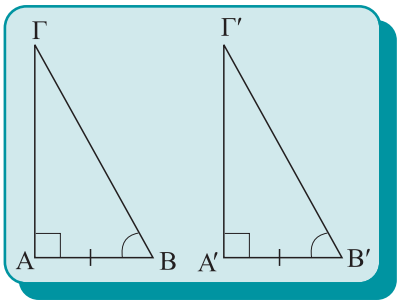
Σχήμα 24

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.** (σχ.24).
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα** (σχ.25)**.**

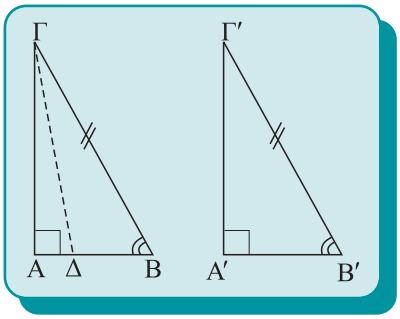
Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.



Σχήμα 25

Θεώρημα Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 26

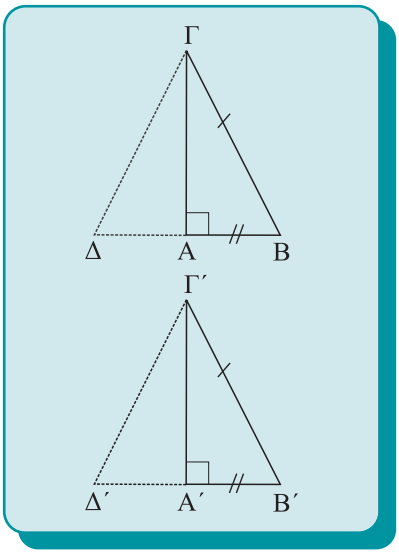
Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και ΑΒ = Α′Β′. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α′Β′ , π.χ. ΑΒ > Α′Β′. Τότε στην πλευρά ΒΑ υπάρχει σημείο Δ, ώστε ΒΔ = Α′Β′.

Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΔΒ = Α′Β′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90°$, δηλαδή ΓΔ⊥ΑΒ. Έτσι έχουμε ΓΑ⊥ΑΒ και ΓΔ⊥ΑΒ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α′Β′. Άρα ΑΒ = Α′Β′, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΑ = Β′Α′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).

Θεώρημα ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 27

Απόδειξη

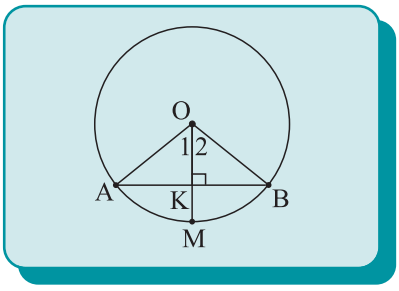
Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και ΑΒ = Α′Β′. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και Β′Α′ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ′, ώστε να είναι ΑΔ = ΑΒ και Α′Δ′ = Α′Β′. Τότε η ΓΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ και η Γ′Α′ μεσοκάθετος του Δ′Β′. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ΓΔ = ΓΒ και Γ′Δ′ = Γ′Β′. Από τις τελευταίες ισότητες και την ΒΓ = Β′Γ′ προκύπτει ότι ΓΔ = Γ′Δ′. Έτσι τα τρίγωνα ΓΔΒ και Γ′Δ′Β′ έχουν ΓΔ = Γ′Δ′, ΒΓ = Β′Γ′ και ΔΒ = Δ′Β′ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων ΑΒ και Α′Β′), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).

Πόρισμα Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

Πόρισμα ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.



Σχήμα 28

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα

είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ολες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**
- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

Θεώρημα III

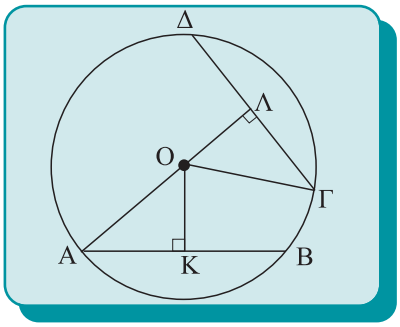
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma\Lambda \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$



Σχήμα 29

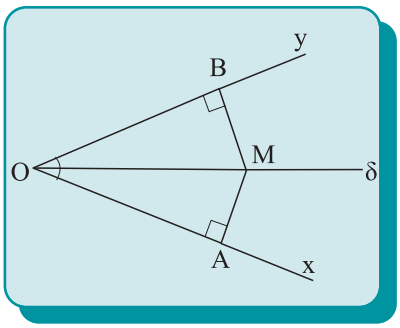
Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως ΜΑ = ΜΒ.

Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy και υποθέτουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και ΜΑ=ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.



Σχήμα 30

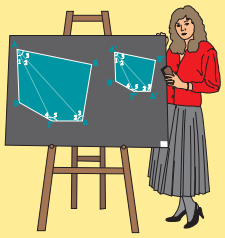
Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.

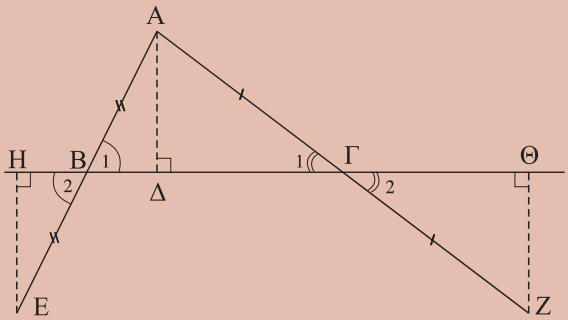


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:

(i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,

(ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Σχήμα 31

Λύση

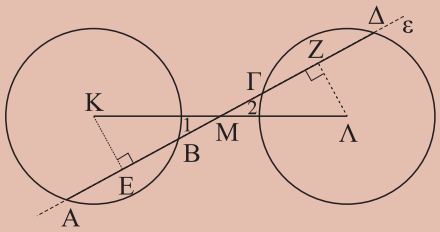
(i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{H} = 90°$) και έχουν ΑΒ = ΒΕ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΖΓΘ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Theta} = 90°$, ΑΓ = ΓΖ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.

(ii) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΕΒΗ προκύπτει ότι ΕΗ=ΑΔ. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει ΖΘ = ΑΔ. Επομένως ΕΗ = ΖΘ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 32

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΖΜΛ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΚΜ = ΜΛ, γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ = ΛΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Αν ΑΒ⊥ε και ΑΓ⊥ε (Β, Γ σημεία της ε) τότε:*

i) Β ≡ Γ Σ Λ

ii) Β ≢ Γ Σ Λ

iii) ΑΒ = ΑΓ Σ Λ

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:*

π_1: Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

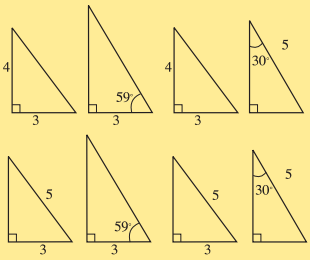
π_2: Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.

π_3: Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3, τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. *Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.*

4. *Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.*



5. *Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:*
Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της ..... και διχοτομεί ....

6. *Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:*

α. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2}KZ$,

β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$,

γ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$,

δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}KE = \frac{1}{3}KZ$,

ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. *Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;*

8. *Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.*

2. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:*
i) από τη βάση,
ii) από τις ίσες πλευρές.

3. *Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.*

4. *Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
ii) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\alpha=\alpha'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha=\mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\alpha=\alpha'$, $\upsilon_\beta=\upsilon_{\beta'}$ και $\upsilon_\gamma=\upsilon_{\gamma'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\angle$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:*
i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα,
ii) ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.*
i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ.
ii)Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ΄, με προβολές τα σημεία Ε΄, Ζ΄ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
iii) Να αποδείξετε ότι ΕΕ΄ = ΑΓ και ΖΖ΄ = ΑΒ.

2. *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

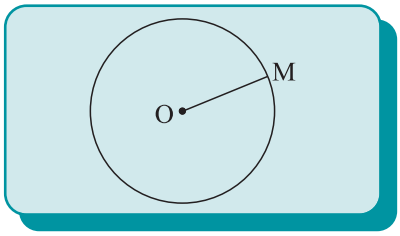
3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

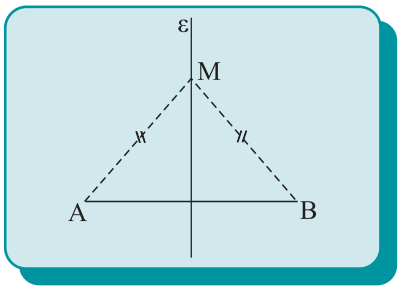
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

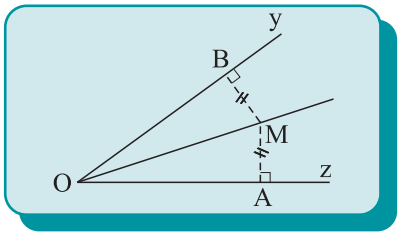
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 33



Σχήμα 34



Σχήμα 35

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

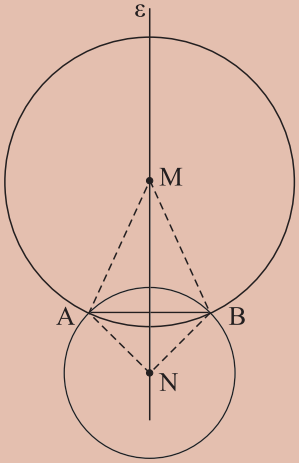
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β (σχ.36). Τότε ΜΑ=ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος ΑΒ.

Αντίστροφα. Έστω Ν ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ. Τότε θα είναι ΝΑ=ΝΒ, οπότε ο κύκλος (Ν,ΝΑ) διέρχεται και από το Β. Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 36

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:
Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ πάνω στην οποία βρίσκεται.
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο Ν της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

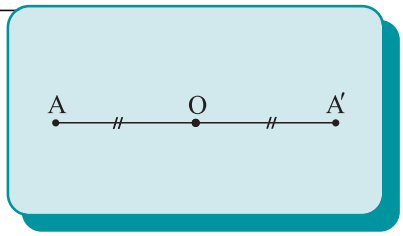
Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.
.i) Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι .....
ii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι .....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, που έχουν σταθερή την πλευρά ΒΓ=α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος.*
2. *Δίνεται κύκλος (Ο,R). Αν Ν τυχαίο σημείο του κύκλου και Μ σημείο στην προέκταση της ΟΝ, ώστε ΟΝ = ΝΜ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ, όταν το Ν διαγράφει τον κύκλο.*

Συμμετρικά σχήματα

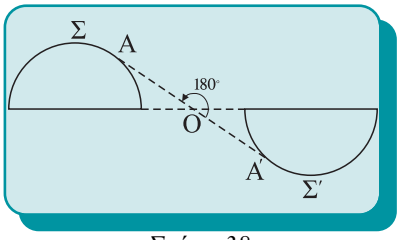
3.8 Κεντρική συμμετρία



Σχήμα 37

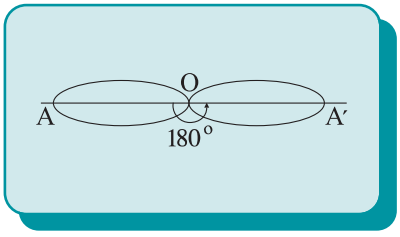
Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία Α,Α΄ λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο Ο (σχ.37).

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο και αντίστροφα. Το σημείο Ο λέγεται ***κέντρο συμμετρίας*** του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α′, ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει ***κεντρική συμμετρία***.



Σχήμα 38

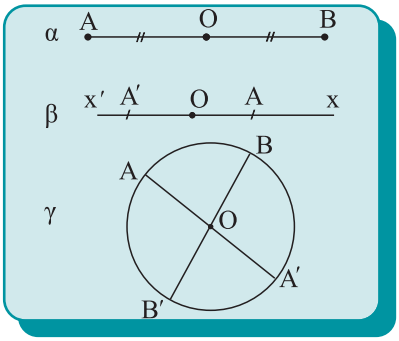
Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.39), κατά 180° γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.



Σχήμα 39

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).



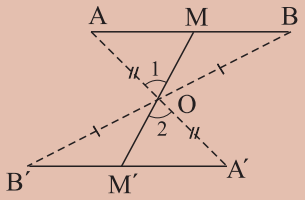
Σχήμα 40

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα τμήμα ΑΒ (σχ.41), σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και Α′, Β′ τα συμμετρικά των Α,Β ως προς το Ο αντίστοιχα. Επειδή ΟΑ′ = ΟΑ, ΟΒ′ = ΟΒ και $A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$, τα τρίγωνα ΑΟΒ και Α′ΟΒ′ είναι ίσα, οπότε Α′Β′ = ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα ΑΒ και Α′Β′ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Έστω σημείο Μ του ΑΒ και Μ′ η τομή της ΜΟ με το Α′Β′. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και Α′ΟΜ′ είναι ίσα γιατί έχουν ΟΑ′ = ΟΑ, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως ΟΜ′ = ΟΜ, που σημαίνει ότι το Μ′ είναι συμμετρικό του Μ.

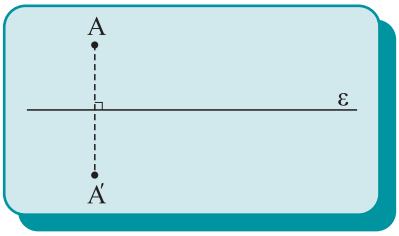


Σχήμα 41

Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου Μ′ του Α′Β′ είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, Α′Β′ είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

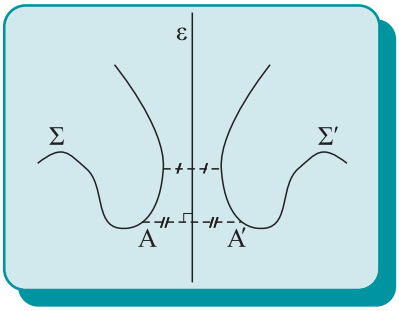
3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α′ λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).

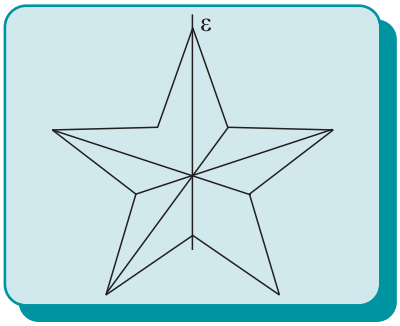


Σχήμα 42

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ′ (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ′ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται ***άξονας συμμετρίας*** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ′. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α′, ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει ***αξονική συμμετρία***. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει



Σχήμα 43

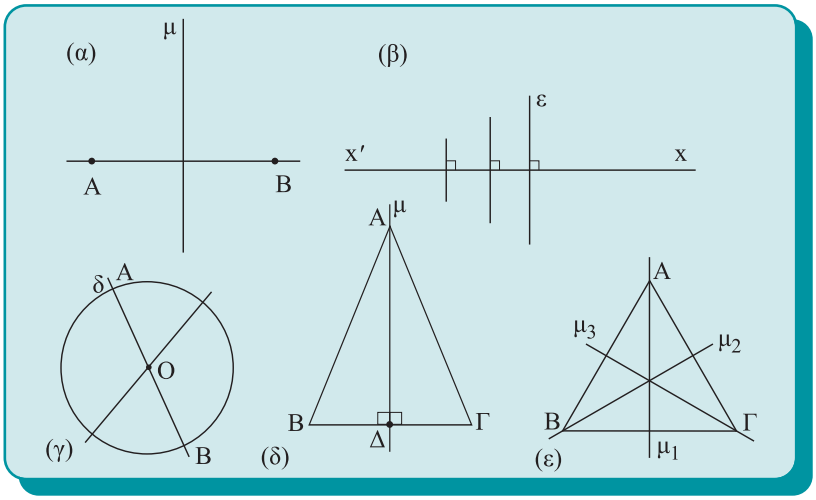


Σχήμα 44

το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Από τα γνωστά μας σχήματα

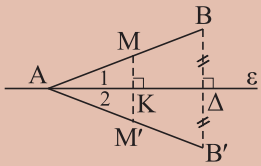
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).
- Η ευθεία x′x έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία ε⊥x′x και την ίδια τη x′x (σχ.45β).
- Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του ΑΒ (σχ.45γ).
- Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους ΑΔ (σχ.45δ).
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



Σχήμα 45

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα ΑΒ του οποίου το ένα άκρο Α είναι σημείο της ε. Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε είναι το τμήμα ΑΒ′ ίσο με το ΑΒ, όπου Β′ το συμμετρικό του Β ως προς την ε.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Το συμμετρικό του Α ως προς την ε είναι το ίδιο το Α, αφού το Α είναι σημείο της ε. Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του ΒΒ′, είναι ΑΒ′ = ΑΒ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΒ′ η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Έστω σημείο Μ του ΑΒ. Φέρουμε ΜΚ⊥ε η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το ΑΒ′ στο Μ′. Στο τρίγωνο ΑΜΜ′ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΜ′ = ΚΜ, οπότε το Μ′ είναι συμμετρικό του Μ. Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του ΑΒ΄ είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, ΑΒ′ είναι συμμετρικά ως προς την ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων:* Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο. Αν Α', Β', Γ' είναι τα συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς το κέντρο Ο αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι συμμετρικά ως προς το Ο και ίσα.*

3. *Αν $x'\hat{A}'y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.*

4. *Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.*

5. *Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.*

6. *Έστω ε, ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο Ο και ένα τυχαίο σημείο Μ. Αν Μ' είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ" το συμμετρικό του Μ' ως προς ε', τότε να αποδείξετε ότι:*
i) ΟΜ = ΟΜ",
ii) τα σημεία Μ, Ο, Μ" είναι συνευθειακά.

Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

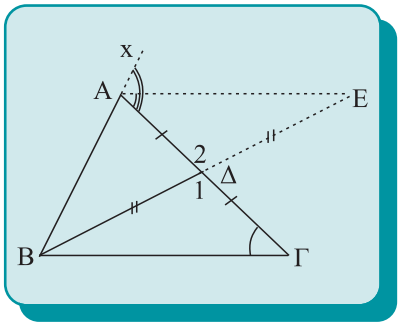
3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{εξ}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: ΒΔ = ΔΕ, ΑΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{εξ}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{εξ} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

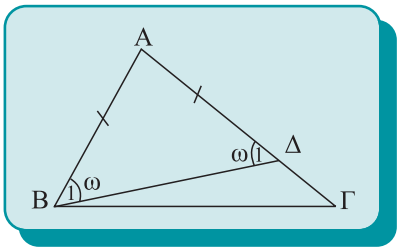
(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.



Σχήμα 48

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος Ι της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

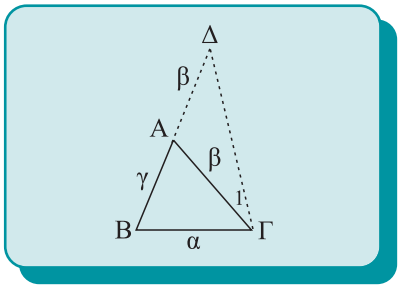
Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α, κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΓΑ εσωτερική ημιευθεία της $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι ΒΓ < ΒΔ ή $\alpha < \beta + \gamma$.



Σχήμα 49

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\boldsymbol{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \ \beta \geq \gamma}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

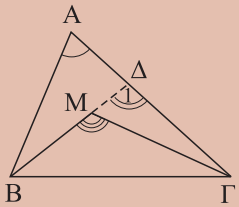
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(i) $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$

(ii) ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ +ΑΓ.



Σχήμα 50

Απόδειξη

(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία ΒΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως $B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$. Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$. Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

(ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΓΔ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$MB + M\Delta < AB + A\Delta \text{ και } M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$MB + M\Delta + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) + M\Delta \text{ ή } MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

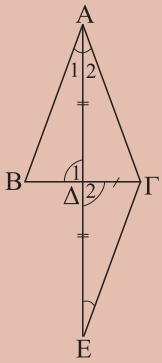
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.



Σχήμα 51

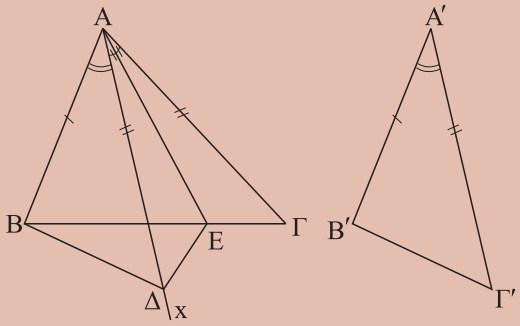
Λύση

Έστω ΑΔ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.51). Προ-

εκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα (ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΔΕ, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα ΑΒ = ΓΕ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$. Από την $\hat{A}_1 = \hat{E}$ προκύπτει ΑΓ = ΓΕ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΒ=ΑΓ. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.



Σχήμα 52

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} > \hat{A}'$ (σχ.55).

Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > Β′Γ′. Αφού $\hat{A} > \hat{A}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αx της $\hat{A}$ τέτοια, ώστε $B\hat{A}x = \hat{A}'$. Πάνω στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, ώστε ΑΔ = Α′Γ′. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, ΒΔ = Β′Γ′. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα ΕΔ = ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι

ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ ή ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ ή Β′Γ′ < ΒΓ.

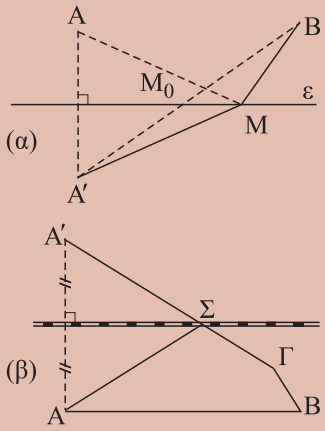
Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΑΒ = Α′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′ και ΒΓ > Β′Γ′. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι ΒΓ = Β′Γ′, ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι Β′Γ′ < ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α′ του Α ως προς την ε (Σχ.53α).

(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β. Πότε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;



Σχήμα 53

Λύση

(i) Επειδή το Α′ είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ′, οπότε ΜΑ = ΜΑ′ και επομένως ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α′Β από το τρίγωνο ΜΑ′Β, έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ > Α′Β (2), ενώ αν το Μ είναι

σημείο του Α′Β′ έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ = Α′Β (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β και ότι το ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α′Β, όταν $M = M_0$, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α′Β.

(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Σ Λ

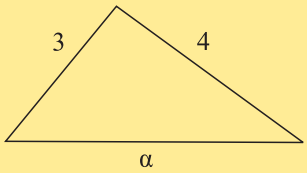
iv) Αν β > γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

v) Αν β = γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. *Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:*

α. α = 7 β. α=1 γ. 1<α<7 δ. α>7 ε. 0<α<1

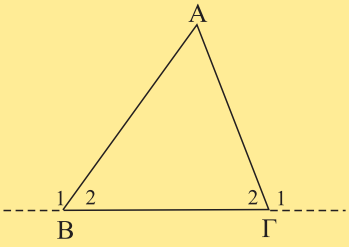
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. *Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $α = \frac{γ}{3}$ και $β = \frac{3γ}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{Γ}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.*



2. *Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{Γ}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=\hat{Γ}$. i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$; ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{Δ}Γ$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}Γ$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.*

5. *Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.*

7. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.*

8. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.*

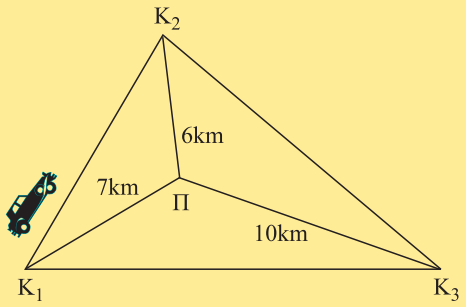
9. *Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

10. *Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1K_2K_3K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή*

τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. *Τι ισχύει όταν* $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ *ή* $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$,

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι* $\Sigma A \le \Sigma M \le \Sigma B$. *(Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος* δ_α *τέμνει κάθετα τη διάμεσο* μ_β, *να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΓ = 2ΑΒ,

ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. *Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ *να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.*

7. *Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.*

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ *διέρχεται από το σημείο Α.*

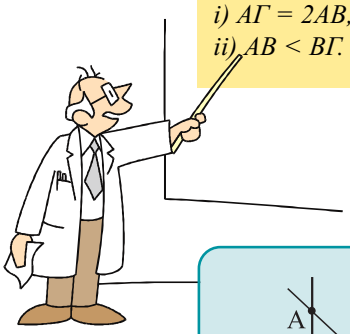
3. *Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΓΔ και ΑΓ+ΒΔ>ΑΔ+ΒΓ,

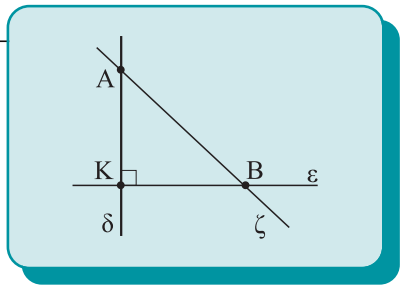
iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. *Στο εσωτερικό ορθής γωνίας* $x\hat{O}y$ *θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.*



3.13 Κάθετες και πλάγιες

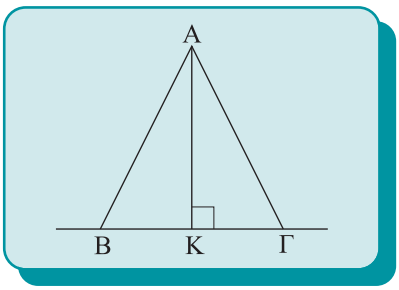
Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ***ίχνος*** της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.



Σχήμα 54

Θεώρημα I

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.



Σχήμα 55

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.

Αντίστροφα. Έστω ότι ΚΒ = ΚΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

Θεώρημα II

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

(i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

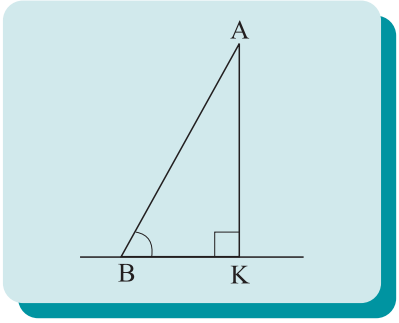
(ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος II, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας.

Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, ΑΒ > ΑΚ.

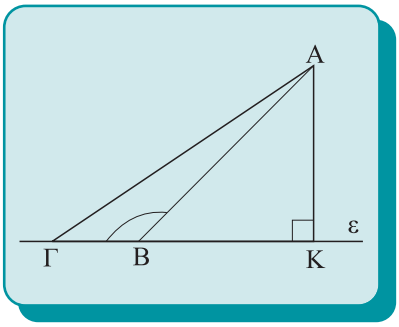


Σχήμα 56

(ii) Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε (σχ.57).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ.

Ας υποθέσουμε ότι ΚΓ > ΚΒ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $A\hat{B}\Gamma > \hat{K} = 1\angle$, δηλαδή η $A\hat{B}\Gamma$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $A\hat{B}\Gamma$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΑΓ>ΑΒ.



Σχήμα 57

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αν ήταν ΚΓ = ΚΒ, τότε θα είχαμε ΑΓ = ΑΒ, που είναι άτοπο. Αν ΚΓ < ΚΒ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι ΑΓ < ΑΒ, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως ΚΓ > ΚΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. *Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες*

i) ΑΒ=ΑΓ⇔ .....

ii) ΑΒ>ΑΓ⇔.....

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) ΑΒ>ΑΚ	*Σ*	*Λ*
ii) ΑΒ=ΑΚ	*Σ*	*Λ*
iii) ΑΒ<ΑΚ	*Σ*	*Λ*

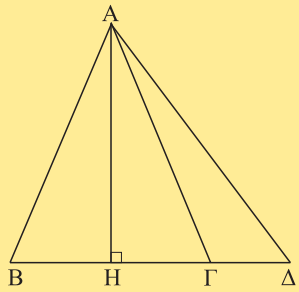
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) ΔΕ < ΕΒ,

ii) ΔΕ < ΒΓ.

2. *Στο παρακάτω σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.*



3. *Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.*

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

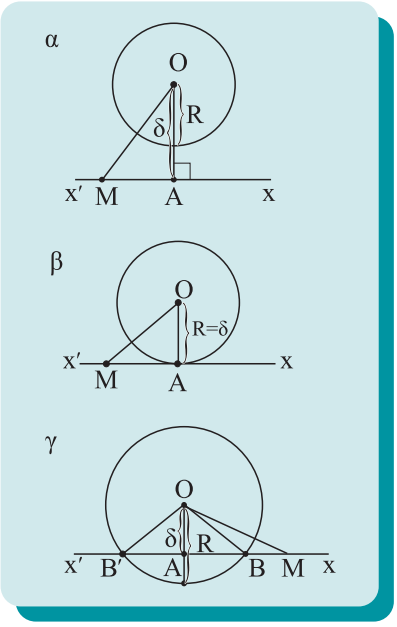
Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

• Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.

• Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο,R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x΄x εφάπτεται του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι:



Σχήμα 58

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.
Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

• Έστω δ < R (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε ΑΜ = R. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού ΟΜ > ΑΜ = R. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx′ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β′.

Επομένως, η x′x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x′x, λέγεται ***τέμνουσα του κύκλου*** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία ***τομής*** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία ***τέμνει*** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- **Αν δ>R, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
- **Αν δ=R, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
- **Αν δ<R, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

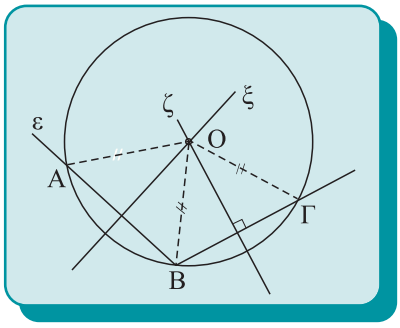
Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή ΟΑ = ΟΒ (= ρ) και ΟΒ = ΟΓ (= ρ), οι μεσοκάθετοι ξ,ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.



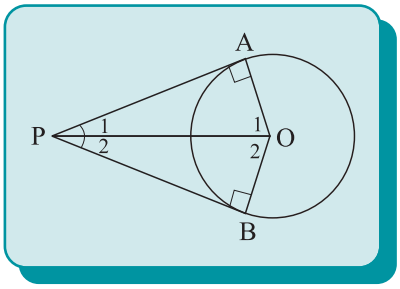
Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται ***εφαπτόμενα τμήματα*** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ ***διακεντρική ευθεία*** του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

Θεώρημα ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.

Πορισμα

Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

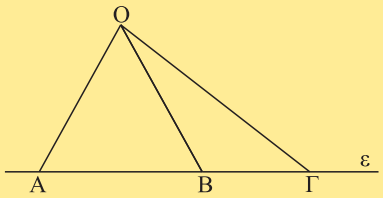
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

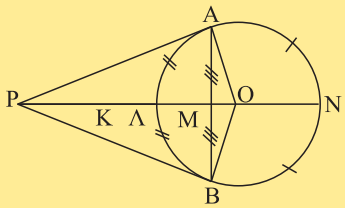
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;*

2. *Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



3. *Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, η ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, Ν μέσα των τόξων $A\overset{\frown}{\Lambda B}$, $A\overset{\frown}{N}B$ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*



i) ΡΑ = ΡΒ.	*Σ*	*Λ*
ii) Η ΡΚ διέρχεται από το Ο.	*Σ*	*Λ*
iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν.	*Σ*	*Λ*
iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $A\overset{\frown}{N}B$.	*Σ*	*Λ*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.*

2. *Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ του κύκλου στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $Γ\hat{O}Δ = 90°$.*

3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

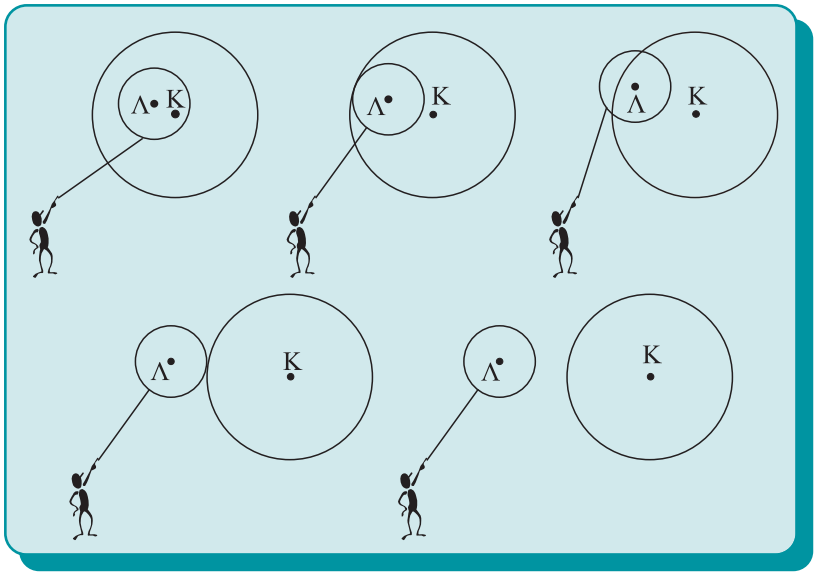
1. *Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.*

2. *Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}Γ$ είναι τριπλάσια της $B\hat{M}Γ$.*

3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.*

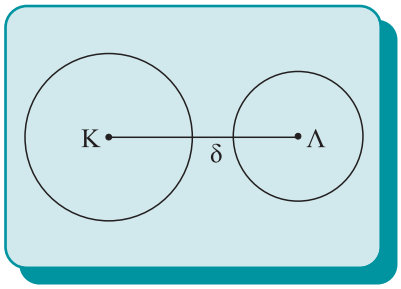
3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R ≥ ρ. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).



Σχήμα 61α

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται ***διάκεντρος*** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β).

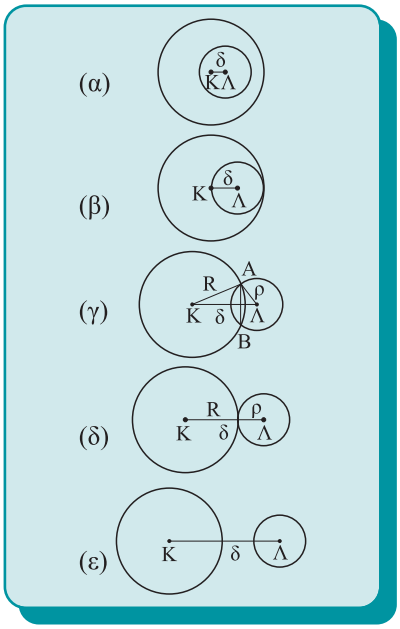


Σχήμα 61β

Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

• **Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία**

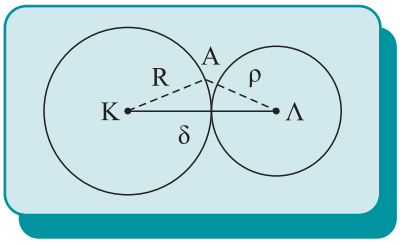
(i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν



Σχήμα 62

και μόνο αν **δ < R – ρ** (σχ.62α).
(ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν **δ > R + ρ** (σχ.62ε).

• **Εφαπόμενοι κύκλοι**
(i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν **δ = R – ρ** (σχ.62β).
(ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν **δ = R + ρ** (σχ.62δ).
Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.
Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ, δηλαδή δ < R + ρ, που είναι άτοπο.

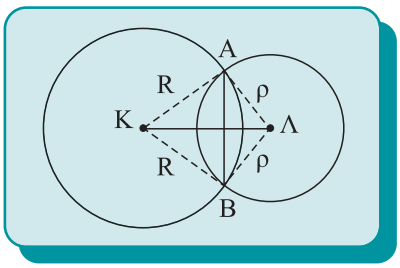


Σχήμα 63

• **Τεμνόμενοι κύκλοι**
Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν **R – ρ < δ < R + ρ** (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

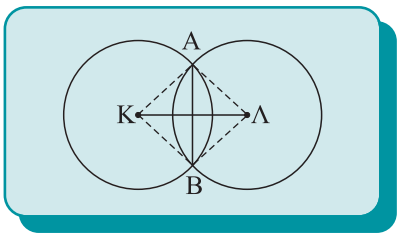
Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 64

Απόδειξη
Έστω οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή ΚΑ = ΚΒ = R, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την ΛΑ = ΛΒ = ρ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.



Σχήμα 65

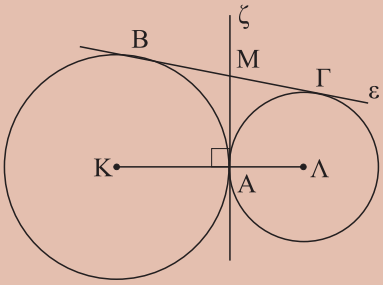
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν R = ρ, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
Πράγματι, επειδή R = ρ, θα είναι ΑΚ = ΑΛ και ΒΚ = ΒΛ. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α (σχ.66). Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα, όπως στο σχ.66. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.

(ii) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.



Σχήμα 66

Απόδειξη

(i) Έστω ότι η ζ εφάπτεται στον κύκλο (Κ) στο Α. Τότε ζ⊥ΚΑ (1).

Επειδή όμως οι κύκλοι εφάπτονται, το Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, οπότε από την (1) προκύπτει ότι ζ⊥ΑΛ, επομένως η ευθεία ζ είναι και εφαπτομένη του κύκλου (Λ).

(ii) Έστω Μ το σημείο τομής της ζ με την ε. Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Κ) και ΜΑ = ΜΓ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Λ). Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι ΜΒ = ΜΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

*Η ευθεία ε του παραπάνω σχήματος, που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη**, ενώ η ευθεία ζ που έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και R > ρ, ΚΛ = δ, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.*

Στήλη Α	*Στήλη Β*
α. Ο κύκλος (Λ,ρ) είναι εσωτερικός του (Κ,R).	*1. $\delta>R+\rho$*
β. Ο κύκλος (Λ,ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ,R).	*2. $\delta=R+\rho$*
γ. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται.	*3. $\delta= R-\rho$*
δ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.	*4. $\delta< R-\rho$*
ε. Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.	*5. $2\delta= R-\rho$*
	6. $\rho<\delta<R$
	7. $2\delta=R\rho$
	8. $R-\rho<\delta<R+\rho$

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής. Σ Λ

ii) Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου. Σ Λ

iii) Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου. Σ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν*

i) $K\Lambda = \frac{\rho}{2}$,

ii) $K\Lambda = \rho$,

iii) $K\Lambda = 2\rho$,

iv) $K\Lambda = 3\rho$,

v) $K\Lambda = 4\rho$.

2. *Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γρά-*

φουμε κύκλο με διάμετρο ΟΑ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Α, ΑΟ) και τον κύκλο με διάμετρο ΟΒ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και εξωτερικό σημείο του Ρ, ώστε ΟΡ <2R. Γράφουμε τον κύκλο (Ο, 2R). Να αποδείξετε ότι:*

i) ο κύκλος (Ο,2R) τέμνει τον κύκλο (Ρ, ΡΟ) σε δύο σημεία Γ και Δ,

ii) τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΟΔ τέμνουν τον κύκλο (Ο, R) στα σημεία Α και Β,

iii) τα ΡΑ και ΡΒ εφάπτονται στον (Ο, R).

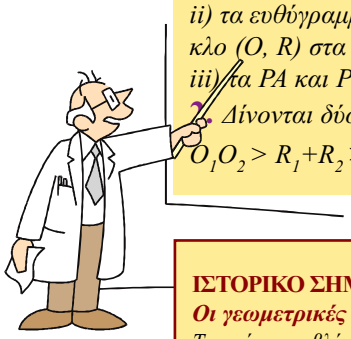
2. *Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1+R_2 > 2R_2$.*

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία Μ, Μ' και τον (O_2) στα σημεία Ν, Ν' αντίστοιχα με τα Μ, Ν μεταξύ των Μ', Ν'. Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου Α, Β τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. *Ένας κύκλος κέντρου Κ είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι $K\hat{P}\Lambda = 90°$.*

4. *Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;*



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαιρούνται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην § 2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.
- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.
- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

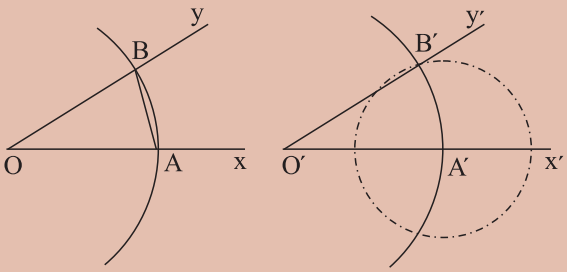
*Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.*

3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές με τις οποίες κατοχυρώνουμε κατασκευαστικά στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα και διαδικασίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη $x\hat{O}y$ η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και κορυφή το O'.



Σχήμα 67

• Κατασκευή

Καθιστούμε τη γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.67) επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο Ο και τυχαία ακτίνα ρ. Έστω $\overset{\frown}{AB}$ το αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O' και ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο που τέμνει την $O'x'$ στο A'. Ακολούθως γράφουμε τον κύκλο (A', AB) του οποίου ένα κοινό σημείο με τον (O',ρ) είναι το B'. Φέρουμε την ημιευθεία $O'B'$. Η γωνία $x'\hat{O}'B'$, δηλαδή η $x'\hat{O}'y'$ είναι η ζητούμενη.

• Απόδειξη

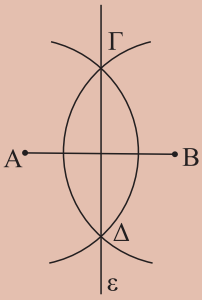
Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}'y'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O,ρ), (O',ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A'B'}$ αντίστοιχα. (§ 2.18)

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O',ρ) και (A', AB) να τέμνονται. Αυτό όμως, συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΟΑΒ). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O',ρ) και (A', AB).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.



Σχήμα 68

• Κατασκευή

Έστω τμήμα ΑΒ (σχ.68). Με κέντρα τα άκρα του Α, Β και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν είναι η ζητούμενη.

• Απόδειξη

Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο ΑΒ (§3.16)

• Διερεύνηση

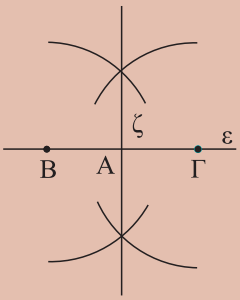
Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρό τους ΑΒ ικανοποιεί την $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: *Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.*

Αρκετές φορές τα παραπάνω βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση μπορεί να παρουσιάζονται ενοποιημμένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται ευθεία ε και σημείο Α. Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το Α κάθετη στην ε, όταν:
(i) το Α είναι σημείο της ευθείας ε,
(ii) το Α δεν είναι σημείο της ε.

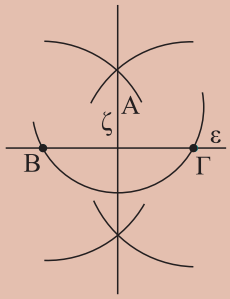


Σχήμα 69

Λύση

(i) Με κέντρο το Α (σχ.69) και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία Β και Γ. Έτσι το Α έγινε μέσο του τμήματος ΒΓ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ (προηγούμενη κατασκευή).

(ii) Με κέντρο το Α (σχ.70) και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία ε στα Β και Γ. Η μεσοκάθετος ζ του τμήματος ΒΓ, που κατασκευάζεται όπως προηγουμένως, είναι η ζητούμενη κάθετος.
Πράγματι, επειδή ΑΒ = ΑΓ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, η μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ διέρχεται από το Α.



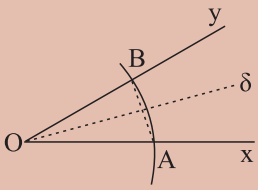
Σχήμα 70

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Λύση

Έστω γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.71). Με κέντρο το Ο και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα Α, Β αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ (Πρόβλημα 2) της χορδής ΑΒ που είναι και η ζητούμενη διχοτόμος.
Πράγματι η ευθεία δ, ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$ της γωνίας $x\hat{O}y$ (§ 3.6). Επομένως είναι διχοτόμος της.



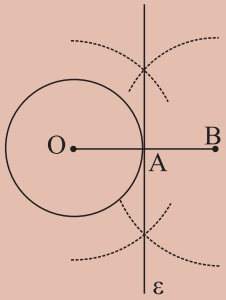
Σχήμα 71

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευασθεί η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο,ρ) σε ένα σημείο του Α.

Λύση

Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ (σχ.72) παίρνουμε το σημείο Β, ώστε να είναι ΑΒ = ΟΑ. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΟΒ που είναι η εφαπτομένη του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα στο άκρο της Α.



Σχήμα 72

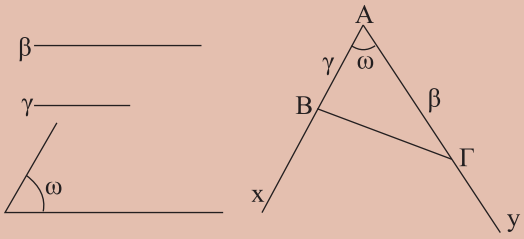
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: *Για την κατασκευή των εφαπτομένων από σημείο εκτός κύκλου βλέπε σελ 137.*

3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (§3.2-3.4) έχουμε τις επόμενες γεωμετρικές κατασκευές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΑΒ = γ, ΑΓ = β και η περιεχόμενη γωνία $\hat{A}$ = ω.



Σχήμα 73

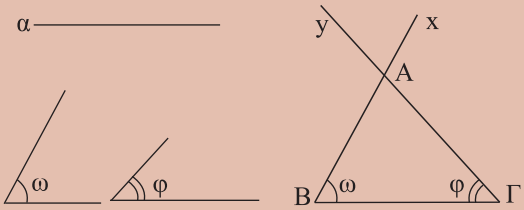
Λύση

Με πλευρά μια ημιευθεία Αx κατασκευάζουμε (§ 3.17) γωνία $x\hat{A}y$ = ω (σχ.73). Στις πλευρές Αx, Αy παίρνουμε, με το διαβήτη, τα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, ώστε ΑΒ = γ και ΑΓ = β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΓ = γ, ΑΓ = β και $\hat{A}$ = ω. Με τον περιορισμό 0° < ω < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνεται η πλευρά ΒΓ=α και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες $\hat{B}$ = ω και $\hat{\Gamma}$ = φ.



Σχήμα 74

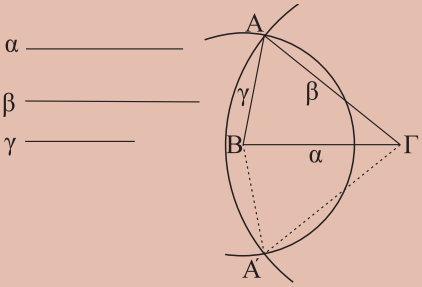
Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και με κορυφές τα Β, Γ (σχ.74) κατασκευάζουμε, προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, γωνίες $\Gamma\hat{B}x$ = ω και $B\hat{\Gamma}y$ = φ. Οι πλευρές Βx, Γy των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΒΓ = α, $\hat{B}$ = ω και $\hat{\Gamma}$ = φ. Με τον περιορισμό 0° < ω + φ < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο (§4.2) θα δούμε ότι ο περιορισμός ω + φ < 180° εξασφαλίζει την τομή των ημιευθειών Βx και Γy.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ.



Σχήμα 75

Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α (σχ.75) και γράφουμε τους κύκλους (Β,γ) και (Γ,β). Αν οι κύκλοι τέμνονται και Α είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή, έχει ΒΓ = α, ΑΒ = γ ως ακτίνα του (Β,γ) και ΑΓ = β ως ακτίνα του (Γ, β).
Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι (Β,γ) και (Γ,β) να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει (§3.16) όταν $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta > \gamma$). Αν Α′ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Β, γ) και (Γ, β), το τρίγωνο Α′ΒΓ είναι ίσο με το ΑΒΓ, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνον αν ισχύει $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$ ($\beta \geq \gamma$). Αν υποθέσουμε ότι $\alpha>\beta$ και $\alpha>\gamma$, η τελευταία διπλή ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\alpha<\beta+\gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πώς θα χωρισθεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα;*

2. *Πώς θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;*

3. *Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφεί με ένα νόμισμα;*

4. *Τα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου όταν:*
α. $\alpha = \beta+\gamma$ β. $\alpha>\beta+\gamma$ γ. $\alpha<\beta+\gamma$ δ. $\alpha<2(\beta+\gamma)$
ε. Τίποτε από τα προηγούμενα.
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45°.*

2. *Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.*

3. *Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα α.*

4. *Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση α και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος υ.*

5. *Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν δίνονται:*
i) ΑΒ = γ και ΑΓ = β,
ii) ΑΒ = γ και ΒΓ = α,
όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ τέτοια, ώστε ΑΓ = Α′Γ′, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\angle$. i) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = Α′Β′, ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.*

2. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και με πλευρές τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ τρία ισόπλευρα τρίγωνα Α′ΒΓ, ΑΒ′Γ και ΑΒΓ′. Να αποδείξετε ότι ΑΑ′ = ΒΒ′ = ΓΓ′.*

3. *Αν ΟΚ, ΟΛ είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Ο,R), να αποδείξετε ότι ΑΒ < ΓΔ, αν και μόνον αν ΟΚ > ΟΛ.*

4. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ και ΒΖ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 1\angle$ και ΑΓ = 2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} < \frac{\hat{A}}{2}$.*

6. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\angle$.*

7. *Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία είναι ίσα.*

8. *Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και δύο εσωτερικά της σημεία Α και Β. Έστω Α′ το συμμετρικό του Α ως προς την Ox και Β′ το συμμετρικό του Β ως προς την Oy. Αν Μ, Ν είναι τυχαία σημεία των Ox, Oy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΑΜ+ΜΝ+ΝΒ=Α′Μ+ΜΝ+ΝΒ′.*
Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής να βρείτε τις θέσεις των Μ, Ν, για τις οποίες το άθροισμα ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ είναι το μικρότερο δυνατό.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Τα τρίγωνα ταξινομούνται σε
- **σκαληνά**, **ισοσκελή** και **ισόπλευρα**, ως προς τις πλευρές τους.
- **οξυγώνια**, **ορθογώνια**, **αμβλυγώνια**, ως προς τις γωνίες τους.

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του, ενώ οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεία.

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:
- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:
- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Στον **κύκλο**:
- Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
- Δύο χορδές είναι ίσες, αν και μόνον αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
  – διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
  – είναι μεσοκάθετος της χορδής,
  – διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικοί **γεωμετρικοί τόποι** είναι: ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας.
- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας, που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο Ο ή μια ευθεία ε, όταν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ, ως προς το Ο ή την ε και αντίστροφα.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο:
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Βασική συνέπεια:
- Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\beta = \gamma$.
- Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της βάσης ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΤΡΙΓΩΝΑ

Είδη - Στοιχεία

Κριτήρια Ισότητας:
- **ΠΓΠ**
- **ΓΠΓ**
- **ΠΠΠ**

Ιδιότητες:
- **ισοσκελών τριγώνων**
- **μεσοκαθέτου**
- **χορδών - τόξων**

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Σχέση χορδών και αποστημάτων

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι:
- **κύκλος**
- **μεσοκάθετος**
- **διχοτόμος**

Συμμετρία ως προς κέντρο και άξονα

Ανισοτικές σχέσεις - Κάθετες και πλάγιες

Σχετικές θέσεις:
- **ευθείας και κύκλου**
- **δύο κύκλων**

Απλές γεωμετρικές κατασκευές – Βασικές κατασκευές τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΛΕΙΞΕΙΣ

- Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός τμήματος αν ισαπέχει από τα άκρα του. Αντίστοιχα ένα εσωτερικό σημείο γωνίας ανήκει στη διχοτόμο της αν ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. (**Ασκήσεις:** §3.4 Σύνθετα 2)

- Αν **δύο** σημεία μιας ευθείας ε ισαπέχουν από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος. (**Ασκήσεις:** §3.12 Εμπέδωσης 2)

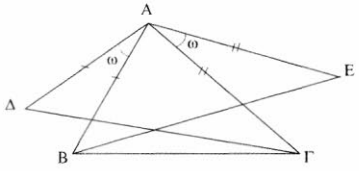
- Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, οπότε και οι αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες του τριγώνου είναι ίσες (παραπληρώματα ίσων γωνιών). (**Ασκήσεις:** §3.4 Σύνθετα 3και §3.12 Εμπέδωσης 8)

- Για να συγκριθούν ανισοτικά δύο τρίγωνα πρέπει να έχουν απαραίτητα δυο πλευρές ίσες.. (**Ασκήσεις:** §3.12 Αποδεικτικές 2, 7)

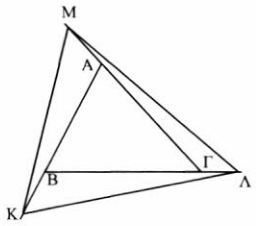
- Όταν η διάμεσος είναι βασικό στοιχείο σε μια άσκηση, συχνά χρειάζεται να την προεκτείνουμε.. (**Ασκήσεις:** §3.12 Αποδεικτικές 3 και Γενικές 7)

§ 3.1 - 3.2

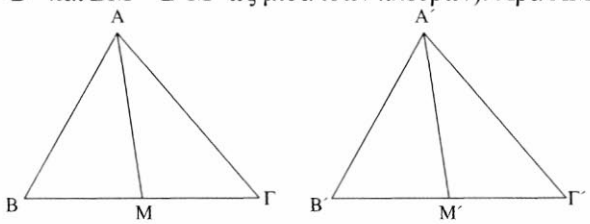
1. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι ίσα. (Π-Γ-Π).
(ΑΒ = ΑΔ, ΑΓ = ΑΕ, $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}\Delta$). Άρα ΒΕ = ΓΔ.



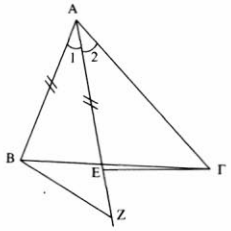
2. Τα τρίγωνα ΚΒΛ, ΓΛΜ, ΜΑΚ είναι ίσα. (Π-Γ-Π)
(ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ, ΒΛ = ΓΜ = ΑΚ ως άθροισμα ίσων τμημάτων και $K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M = M\hat{A}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών).
Άρα ΚΛ = ΛΜ = ΜΚ



3. Τα τρίγωνα ΑΜΓ και Α΄Μ΄Γ΄ είναι ίσα (Π-Γ-Π)
(ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{B} = \hat{B}'$ και ΒΜ = Β΄Μ΄ ως μισά ίσων πλευρών). Άρα ΑΜ = Α΄Μ΄.



4. Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΖ είναι ίσα, αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ΑΒ = ΑΕ και ΑΖ = ΑΓ (Π-Γ-Π). Άρα $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.



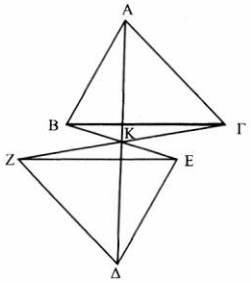
Αποδεικτικές Ασκήσεις

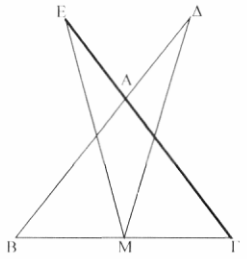
1. Τα τρίγωνα ΔΚΕ και ΒΚΑ είναι ίσα αφού ΑΚ = ΚΔ, ΒΚ = ΚΕ και $A\hat{K}B = \Delta\hat{K}E$ ως κατακορυφήν.
Άρα $E\hat{\Delta}K = B\hat{A}K$ (1)
Όμοια τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΖΚΔ είναι ίσα, οπότε

$$Z\hat{\Delta}K = \Gamma\hat{A}K \ (2)$$

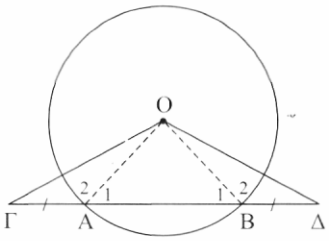
Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι

$$E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma.$$





2. Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Π-Γ-Π) (ΒΜ = ΜΓ, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ = ΓΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων).
Άρα ΜΔ = ΜΕ.

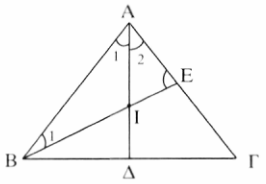


3. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και επομένως $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.
Έτσι τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε $O\hat{\Gamma}A = O\hat{A}B$

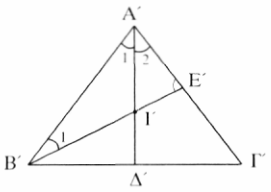
Σχόλιο:
Στις παραπάνω ασκήσεις χρησιμοποιούμε ισότητες τριγώνων για να αποδείξουμε ισότητες τμημάτων ή γωνιών.

§ 3.3 - 3.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

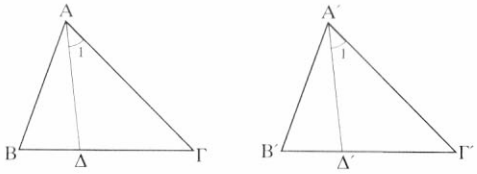


1. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα (Π-Γ-Π).
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα (ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{B} = \hat{B}', \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2} = \hat{A}'_1$). Άρα ΑΔ = Α΄Δ΄.
Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α΄Β΄Ε΄ είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Άρα ΒΕ = Β΄Ε΄.



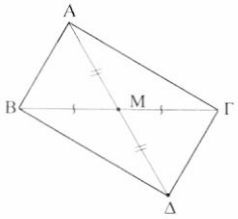
β) Τα τρίγωνα ΑΙΕ και Α΄Ι΄Ε΄ είναι ίσα γιατί ΑΕ = Α΄Ε΄ (από το (α)), $\hat{E} = \hat{E}'$ και $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ (Γ-Π-Γ). Άρα ΑΙ = Α΄Ι΄. Όμοια, από την ισότητα των τριγώνων ΒΙΔ και Β΄Ι΄Δ΄ προκύπτει ότι ΒΙ = Β΄Ι΄.

2. i) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και Α΄Δ΄Γ΄ είναι ίσα γιατί
ΑΓ = Α΄Γ΄, ΑΔ = Α΄Δ΄ και $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ (Π-Γ-Π).
Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.



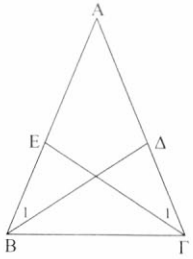
ii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα γιατί ΑΓ = Α΄Γ΄, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ από το (α) (Γ-Π-Γ). Άρα α = α΄ και γ=γ΄.

3. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΓΜΔ είναι ίσα (Π-Γ-Π). Άρα ΑΒ=ΓΔ. Όμοια τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΒΜΔ είναι ίσα. Άρα ΑΓ = ΒΔ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν τις πλευρές τους ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Π-Π).

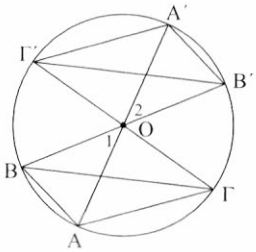


Αποδεικτικές Ασκήσεις

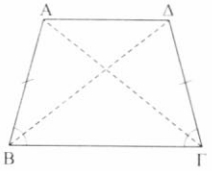
1. Έστω ΒΔ και ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα γιατί έχουν:
ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A}$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (μισά ίσων γωνιών). Από την ισότητα αυτή προκύπτει το ζητούμενο.



2. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ είναι ίσα, γιατί έχουν: ΟΑ = ΟΑ΄ και ΟΒ= ΟΒ΄, ως ακτίνες και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ως κατακορυφήν. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΑΒ = Α΄Β΄. Όμοια βρίσκουμε ότι ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΒΓ = Β΄Γ΄. Έτσι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.



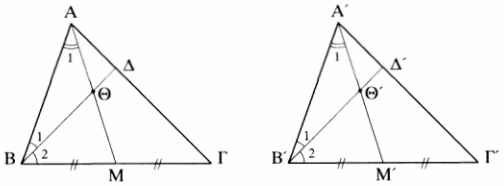
3. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ίσα, γιατί έχουν: ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ κονή και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΑΓ = ΒΔ οπότε και τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



Σύνθετα Θέματα

3.3-3.4

1. i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα (ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$) (Γ-Π-Γ). Άρα ΒΔ = Β΄Δ΄.

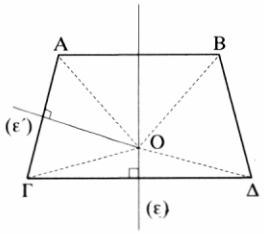


ii) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και Β΄Α΄Μ είναι ίσα (ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{B} = \hat{B}'$, ΒΜ =Β΄Μ΄) (Π-Γ-Π). Άρα $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$.

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α΄Β΄Θ΄ είναι ίσα (ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ και $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$ από το (β)) (Γ-Π-Γ).

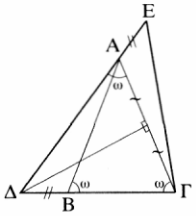
δ) Από το (γ) προκύπτει ότι ΑΘ = Α΄Θ΄. Επίσης ΒΘ = Β΄Θ.
Άρα ΒΔ – ΒΘ = Β΄Δ΄ –Β΄Θ΄ ή ΘΔ = Θ΄Δ΄.

2. Έστω ε΄ η μεσοκάθετος του ΑΓ και Ο το σημείο τομής των ε και ε΄. Επειδή ε μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι ΟΑ =ΟΒ (1). Όμοια ΟΓ = ΟΔ (2).
Αλλά το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΑΓ.
Άρα ΟΑ = ΟΓ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΟΒ = ΟΔ, δηλαδή το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΔ.



3. i) Επειδή το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ είναι ΔΑ = ΔΓ. Άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές.

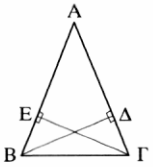
ii) Τα τρίγωνα ΓΑΕ και ΑΒΔ είναι ίσα, γιατί ΑΕ = ΒΔ, ΑΓ = ΑΒ και $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}E$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma = \omega$) (Π-Γ-Π).
Άρα ΓΕ = ΓΔ, δηλαδή το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.



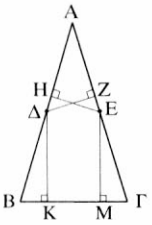
§3.5-3.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

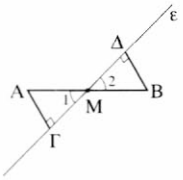
1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90°$, ΑΒ = ΑΓ). Άρα ΒΔ = ΓΕ



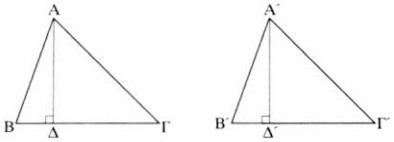
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
i) Αν ΔΚ⊥ΒΓ, ΕΜ⊥ΒΓ τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΜΕΓ είναι ίσα ($\hat{K} = \hat{M} = 90°$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ΔΒ = ΕΓ ως μισά ίσων πλευρών).
Άρα ΔΚ = ΜΕ.
ii) Αν ΔΖ⊥ΑΓ και ΕΗ⊥ΑΒ, τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΔΖ είναι ίσα ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΔ = ΑΕ). Άρα ΔΖ = ΕΗ.



3. Έστω ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του ΑΒ.
Αν ΑΓ⊥ε και ΔΒ⊥ε τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΔΒ είναι ίσα (ΑΜ = ΒΜ, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 90°$). Άρα ΑΓ = ΒΔ.



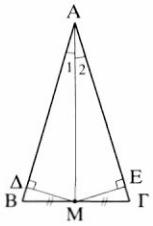
4. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα με ΒΓ = Β΄Γ΄ .Αν ΑΔ, Α΄Δ΄ τα αντί στοιχα ύψη, τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα.
(ΑΒ = Α΄Β΄, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90°$) .
Άρα ΑΔ = Α΄Δ.



Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι αν το Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ τότε και το Δ΄ ανήκει στην πλευρά Β΄Γ΄.

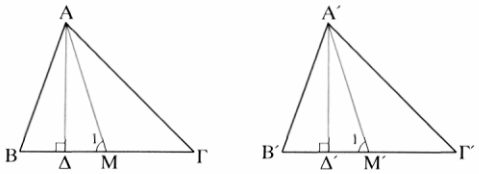
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω ΜΔ⊥ΑΒ και ΜΕ⊥ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα (ΑΜ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^o$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΜ διάμεσος και διχοτόμος).
Άρα i) ΜΔ = ΜΕ και ii) $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}E$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{M}E$.



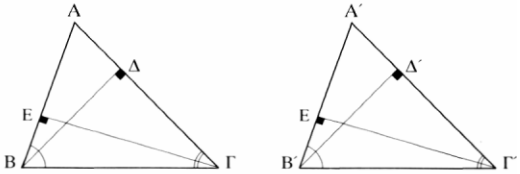
Σχόλιο:
Αποφύγαμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ γιατί δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι τα Δ,Ε είναι προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Αυτό προκύπτει μετά τη διαπίστωση ότι οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι οξείες.

2. Τα τρίγωνα ΑΔΜ και Α΄Δ΄Μ΄ είναι ίσα ($\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_1 = 90^o$, $A\Delta = A'\Delta', AM = A'M'$).



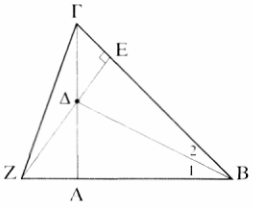
Άρα $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$ (1).
Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ είναι ίσα (ΑΜ=Α΄Μ΄, $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$ από (1) και ΒΜ=Β΄Μ΄ ως μισά ίσων πλευρών). Άρα ΑΒ=Α΄Β΄ (2) και $\hat{B} = \hat{B}'$ (3).
Από τις (2), (3) και την υπόθεση (α=α΄), προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

3. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και Β΄Ε΄Γ΄ είναι ίσα (ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΕ=Γ΄Ε΄, $\hat{E} = \hat{E}' = 90^o$).



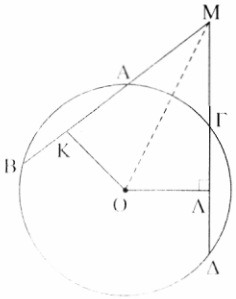
Άρα $\hat{B} = \hat{B}'$ (1).
Όμοια από τα τρίγωνα ΒΔΓ και Β΄Δ΄Γ΄ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ (2).
Από τις (1), (2) και την υπόθεση (α=α΄), προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα (Γ-Π-Γ).

4. Τα τρίγωνα ΕΔΒ και ΑΔΒ έχουν $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90°$, ΒΔ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, άρα είναι ίσα οπότε ΑΒ=ΒΕ (1).



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΖ έχουν $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$, ΑΒ=ΒΕ (από (1)) και $\hat{B}$ κοινή, άρα είναι ίσα, οπότε ΒΖ=ΒΓ δηλαδή το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

5. i) Επειδή ΑΒ = ΓΔ θα είναι ΟΚ = ΟΛ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα γιατί έχουν ΟΜ κοινή και ΟΚ = ΟΛ.



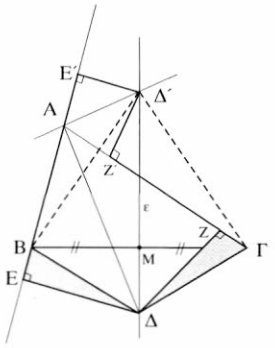
ii) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΜΚ = ΜΛ (1). Όμως τα Κ,Λ είναι μέσα των ίσων χορδών ΑΒ και ΓΔ, οπότε ΑΚ = ΓΛ (2) και ΒΚ = ΔΛ (3). Από τις (1), (2) προκύπτει ΜΑ = ΜΓ και από τις (1), (3) ότι ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

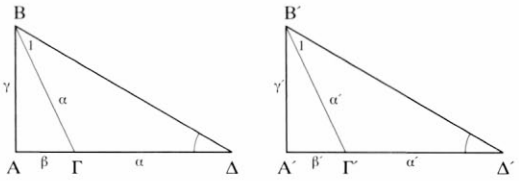
1. i) Τα τρίγωνα ΕΔΒ και ΔΖΓ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΔΒ = ΔΓ (Δ σημείο της μεσοκαθέτου) ΔΕ = ΔΖ (αποστάσεις σημείου της διχοτόμου), άρα είναι ίσα.

ii) Για τους ίδιους λόγους και τα τρίγωνα Δ΄ΒΕ΄ και Δ΄ΓΖ΄ είναι ίσα.

iii) Από τις παραπάνω ισότητες τριγώνων προκύπτουν: ΑΕ = ΑΖ και ΓΖ΄= ΒΕ΄. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές παίρνουμε:
ΑΕ + ΓΖ΄ = ΑΖ + ΒΕ΄ ⇔ ΑΒ + ΒΕ + ΑΓ –ΑΖ΄ = ΑΓ –ΓΖ + ΑΒ + ΑΕ΄ ⇔ ΒΕ + ΓΖ = ΑΕ΄+ ΑΖ΄ ⇔ 2ΒΕ = 2ΑΖ΄⇔ΒΕ = ΑΖ΄οπότε: ΕΕ΄= ΑΕ + ΑΕ΄ = ΑΖ + ΖΓ = ΑΓ και ΖΖ΄= ΑΖ – ΑΖ΄ = ΑΕ–ΒΕ = ΑΒ.



2. Έστω ότι γ=γ΄. Προεκτείνουμε τις ΑΓ, Α΄Γ΄ κατά τμήματα ΓΔ=α και Γ΄Δ΄=α΄ αντίστοιχα. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και επομένως είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $A\hat{B}\Delta = A'\hat{B}'\Delta'$ (1) και $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$, οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ (2)

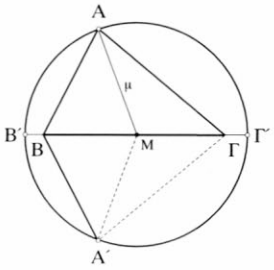


(γιατί τα τρίγωνα ΒΓΔ, Β΄Γ΄Δ΄ είναι ισοσκελή). Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{B} = \hat{B}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$, ΑΒ=Α΄Β΄ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα.

§ 3.7
Ασκήσεις Εμπέδωσης

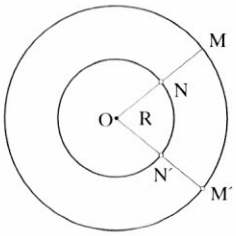
1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με σταθερή την πλευρά ΒΓ=α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος μ. Επειδή το Α απέχει από το σταθερό σημείο Μ σταθερή απόσταση μ, βρίσκεται στον κύκλο (Μ,μ).

- **Αντίστροφα:** Έστω Α΄ σημείο του κύκλου (Μ,μ) τότε Α΄Μ=μ, ως ακτίνα του κύκλου και Α΄Μ διάμεσος του Α΄ΒΓ. Το Α δεν είναι σημείο της ευθείας ΒΓ. Επομένως γ.τ. του Α είναι ο κύκλος (Μ,μ) χωρίς τα σημεία του Β΄ και Γ΄.



2. Αν Μ είναι ένα σημείο του ζητούμενου γ.τ., θα είναι ΟΜ=2R και επομένως το Μ ανήκει στον κύκλο (Ο,2R)

- **Αντίστροφα:** Αν Μ΄ είναι ένα σημείο του (Ο,2R) και Ν΄ η τομή του ΟΜ΄ με τον (Ο,R) τότε ΟΝ΄=R, οπότε Ν΄Μ΄=2R–R=R, δηλαδή ΟΝ΄=Ν΄Μ΄.
  Άρα ο γ.τ. του Μ είναι ο κύκλος (Ο,2R).

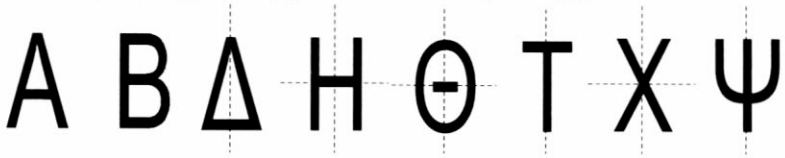


Σχόλιο:
Στα προβλήματα γ.τ. εξετάζουμε ευθύ και αντίστροφο.

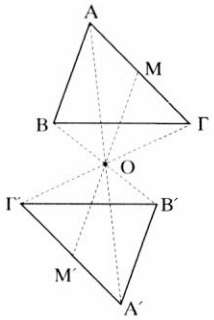
§ 3.8 - 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

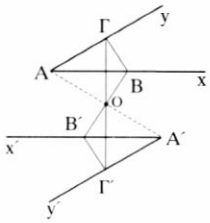
1. Οι ζητούμενοι άξονες συμμετρίας φαίνονται στα επόμενα σχήματα:



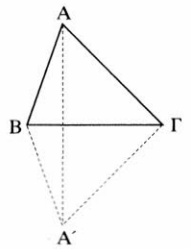
2. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.8 το συμμετρικό Μ΄ ενός σημείου Μ του τριγώνου ΑΒΓ είναι σημείο του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ και αντίστροφα. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Εξάλλου από Α΄Β΄=ΑΒ, Β΄Γ΄=ΒΓ και Γ΄Α΄= ΓΑ προκύπτει ότι $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} = \overset{\Delta}{AB\Gamma}$.



3. Έστω Β,Γ σημεία των Ax, Ay αντίστοιχα και Β΄, Γ΄ τα συμμετρικά αυτών ως προς το Ο. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} = \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ οπότε $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.



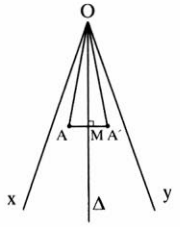
4. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.9 είναι ΒΑ΄= ΒΑ και ΓΑ΄ = ΓΑ οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ΒΓ είναι ίσα (Π-Π-Π).



5. Έστω ΟΔ η διχοτόμος της $x\hat{O}y$ και Α σημείο της $x\hat{O}y$ π.χ. της $x\hat{O}\Delta$. Αν Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ΟΔ τότε το τρίγωνο ΟΑΑ΄ είναι ισοσκελές οπότε έχουμε:

$$A'\hat{O}M = A\hat{O}M \leq M\hat{O}x = M\hat{O}y .$$

Το Α΄ επομένως είναι σημείο της $\Delta\hat{O}y$ δηλαδή της $x\hat{O}y$. Άρα η ΟΔ είναι άξονας συμμετρίας.

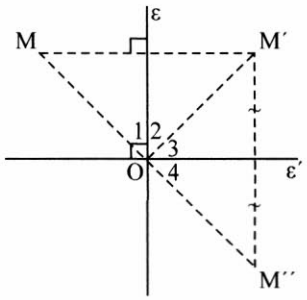


6. i) Επειδή Μ΄ συμμετρικό του Μ ως προς ε, η ε είναι μεσοκάθετη του ΜΜ΄, οπότε ΟΜ=ΟΜ΄ (1). Για τους ίδιους λόγους είναι και ΟΜ΄=ΟΜ΄΄ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ΟΜ΄=ΟΜ΄΄.

ii) Η ε είναι άξονας συμμετρίας του ΜΜ΄ οπότε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Όμοια $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$, οπότε έχουμε:

$$M\hat{O}M'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 =$$

$= 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 1\angle = 2\angle$ αφού οι ε, ε΄ είναι κάθετες. Η ισότητα $M\hat{O}M'' = 2\angle$ σημαίνει ότι τα Μ, Ο, Μ΄΄ είναι συνευθειακά.

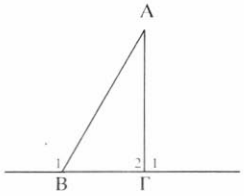


Σχόλιο:

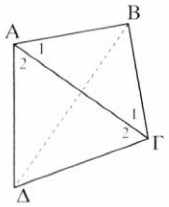
Από την άσκηση αυτή συμπεραίνουμε ότι: αν ένα σχήμα έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε το σημείο τομής τους είναι κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

§ 3.10 - 3.12

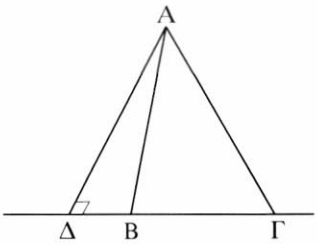
Ασκήσεις Εμπέδωσης



1. Επειδή η $\hat{B}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_2$ (1). Από υπόθεση όμως $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $2\hat{B}_1 > 180^o \Leftrightarrow \hat{B}_1 > 90^o$.

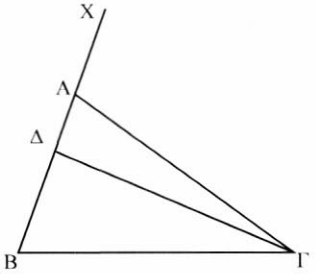


2. Το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ΑΔ=ΓΔ. Επειδή τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από το Α και Γ, η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.



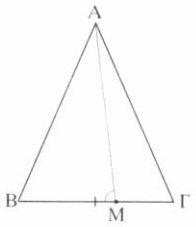
3. i) Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} < 90^o$.

ii) Έστω ΑΔ το ύψος. Αν Δ≡Β θα είχαμε $A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B}$ δηλαδή $90^o = \hat{B}$ άτοπο. Αν το Δ ήταν σημείο της προέκτασης της ΓΒ προς το Β θα είχαμε $\hat{B} > \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{B} > 90^o$ άτοπο. Άρα το Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

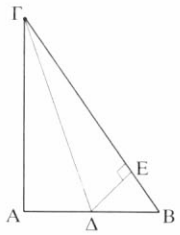


4. Αν το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β, Α τότε η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΑΓ, οπότε $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$. Ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις.

5. Είναι $\hat{M} > \hat{\Gamma}$ (1), αφού $\hat{M}$ εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΜΓ. Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (2). Από (1), (2) παίρνουμε $\hat{M} > \hat{B}$ οπότε από το τρίγωνο ΑΒΜ προκύπτει ΑΒ>ΑΜ.



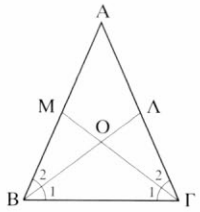
6. Φέρνουμε ΔΕ ⊥ΒΓ. Επειδή ΓΔ διχοτόμος θα είναι ΑΔ=ΔΕ (1). Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΒ προκύπτει ΔΕ<ΔΒ (2). Από (1),(2) παίρνουμε ΑΔ<ΔΒ.

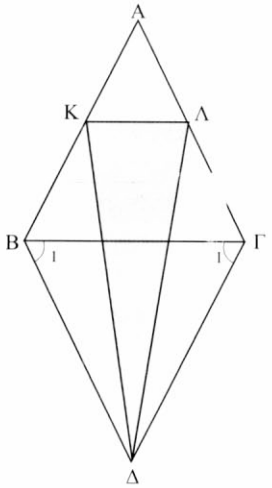


7. Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΓΛ είναι ίσα (Π-Γ-Π), επομένως $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Είναι και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ αφού ΟΒ=ΟΓ , οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



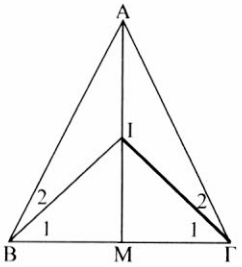


8. Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$, οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και επομένως ΒΔ=ΔΓ.

Έτσι τα τρίγωνα ΚΒΔ και ΛΓΔ έχουν ΚΒ=ΛΓ, ΒΔ=ΓΔ και $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}\Delta$ οπότε είναι ίσα και επομένως ΔΚ=ΔΛ.

9. i) Είναι $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$, οπότε το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

ii) Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ είναι ίσα (Π-Π-Π), αφού έχουν ΒΙ=ΓΙ, ΑΒ=ΑΓ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ ($\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$).



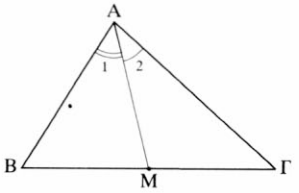
10. Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $ΠΚ_1Κ_2$, $ΠΚ_1Κ_3$ και $ΠΚ_3Κ_2$ (σχ. Βιβλίου) παίρνουμε αντίστοιχα $Κ_1Κ_2<13$, $Κ_1Κ_3<17$ και $Κ_3Κ_2<16$. Προσθέτοντας αυτές κατά μέλη βρίσκουμε $Κ_1Κ_2+Κ_1Κ_3+Κ_3Κ_2<46$. Επομένως ο χιλιομετρητής θάπρεπε να γράψει απόσταση μικρότερη του 46 και όχι 48.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

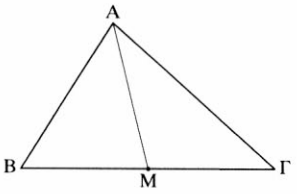
1. Από την $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$ προκύπτουν ΑΜ<ΒΜ και ΑΜ<ΜΓ.

Απ' αυτές παίρνουμε αντίστοιχα $\hat{B} < \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} < \hat{A}_2$, απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$.

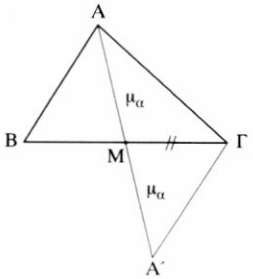
Όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ ισχύουν αντίστοιχα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$ ή $\hat{B} + \hat{\Gamma} > \hat{A}$.



2. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΜ=κοινή, ΒΜ=ΜΓ) και τις τρίτες άνισες (ΑΒ<ΑΓ), οπότε (εφαρμογή §3.12) οι απέναντι γωνίες θα είναι ομοίως άνισες $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.



3. α) Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΑ΄. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και Α΄ΜΓ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε ΓΑ΄=ΑΒ και $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}'M$ (1). Στο τρίγωνο ΑΓΑ΄ είναι ΑΓ>ΓΑ΄ (γιατί ΑΓ>ΑΒ), οπότε $M\hat{A}\Gamma > M\hat{A}\Gamma$, από την οποία σύμφωνα με την (1) προκύπτει $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$.



β) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΑΓΑ΄ παίρνουμε:

ΑΓ-ΓΑ΄<ΑΑ΄<ΑΓ+ΓΑ΄⇔

$$\beta-\gamma<2\mu_\alpha<\beta+\gamma \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma}{2}<\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$$

γ) Σύμφωνα με το β) έχουμε:

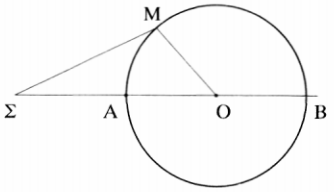
$$\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}, \mu_\beta<\frac{\gamma+\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \mu_\gamma<\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma<\alpha+\beta+\gamma=2\tau$

4. Αν τα Σ,Ο,Μ δεν είναι συνευθειακά με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΣΜΟ παίρνουμε:

ΣΟ-ΟΜ<ΣΜ<ΣΟ+ΟΜ ⇔ ΣΟ-ΟΑ<ΣΜ<ΣΟ+ΟΒ ⇔ ΣΑ<ΣΜ<ΣΒ

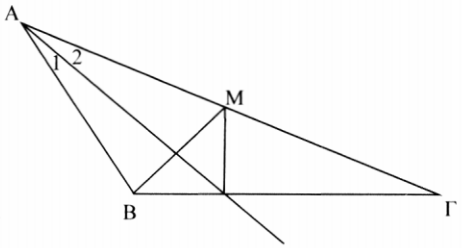
- Αν Μ≡Α τότε: ΣΑ=ΣΜ<ΣΒ και
- αν Μ≡Β είναι ΣΑ<ΣΜ=ΣΒ.



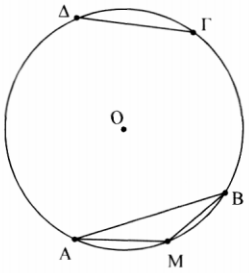
5. Στο τρίγωνο ΑΒΜ η διχοτόμος είναι και ύψος, επομένως είναι ισοσκελές δηλαδή

$$AB=AM=\frac{1}{2}A\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma=2AB \ (1).$$

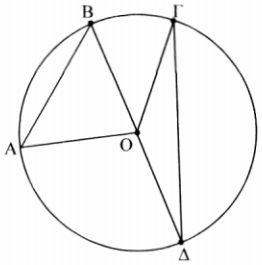
Με εφαρμογή της τριγ. ανισότητας στο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε $A\Gamma<AB+B\Gamma \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $2AB<AB+B\Gamma \Leftrightarrow AB<B\Gamma$.



6. Θεωρούμε το μέσο του τόξου ΑΒ, οπότε $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και ΑΜ = ΜΒ = ΓΔ. Τότε, λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΑΜΒ, έχουμε ότι: ΑΜ + ΜΒ > ΑΒ ή 2ΓΔ > ΑΒ.

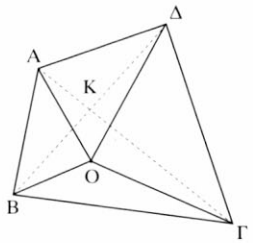


7. Έστω ότι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}>\overset{\frown}{AB}$, οπότε η επίκεντρη γωνία ΓΟΔ είναι μεγαλύτερη της ΑΟΒ. Τα τρίγωνα ΓΟΔ και ΑΟΒ έχουν δύο ζεύγη πλευρών ίσα (ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = R) και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες οπότε ΓΔ > ΑΒ. (εφ. § 3.11).
Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο.



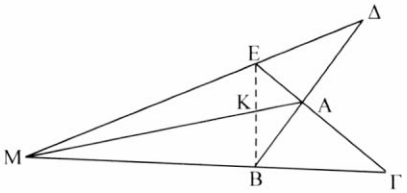
Σύνθετα Θέματα

1. i) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΟΒ,ΒΟΓ,ΓΟΔ και ΔΟΑ παίρνουμε αντίστοιχα:
ΑΒ<ΟΑ+ΟΒ, ΒΓ<ΟΒ+ΟΓ, ΓΔ<ΟΓ+ΟΔ και
ΑΔ<ΟΔ+ΟΑ από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.
ii) Αν το Ο δεν είναι σημείο της ΑΓ από το τρίγωνο ΑΟΓ προκύπτει ότι: ΟΑ+ΟΓ>ΑΓ και αν το Ο είναι σημείο της ΑΓ θα είναι ΟΑ+ΟΓ≥ΑΓ (1). Όμοια παίρνουμε ΟΒ+ΟΔ≥ΒΔ (2).



Από (1),(2) προκύπτει ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ≥ΑΓ+ΒΔ η οποία σημαίνει ότι ελάχιστη τιμή του αθροίσματος ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ είναι η ΑΓ+ΒΔ και συμβαίνει όταν το Ο είναι σημείο της ΑΓ και της ΒΔ δηλαδή όταν Ο≡Κ.

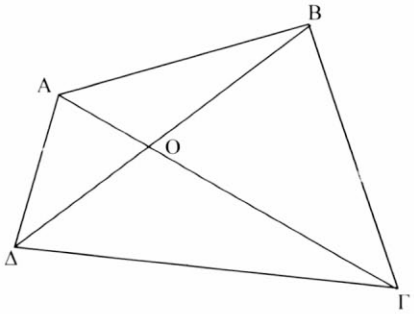
2. Αφού το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, θα είναι $A\hat{E}B = A\hat{B}E$ και επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι ίσα, θα είναι $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$. Επομένως $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Gamma$ και $M\hat{E}B = M\hat{B}E$, οπότε το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές.
ii) Αν φέρουμε τη διάμεσο ΑΚ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΒ θα είναι ύψος και διχοτόμος, όμοια και η ΜΚ, οπότε τα σημεία Μ, Κ, Α, είναι συνευθειακά.



3. i) Είναι ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ (από το τρίγωνο ΑΒΓ)
ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ (από το τρίγωνο ΑΔΓ)
και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.
ii) Είναι ΑΟ + ΟΒ > ΑΒ και ΔΟ + ΟΓ > ΓΔ
και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.
iii) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισότητες (ii) έχουμε ότι:

$$\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} < A\Gamma + B\Delta.$$

Επίσης προσθέτοντας κατά μέλη τις ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ, ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ, ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ και ΒΔ < ΒΓ + ΓΔ καταλήγουμε ότι ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.



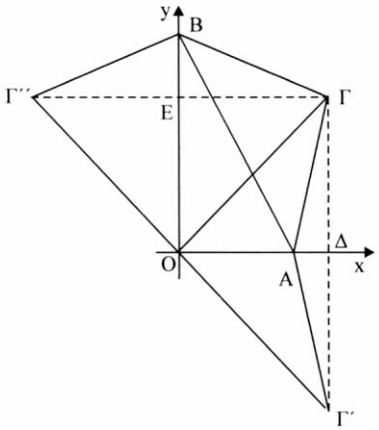
4. Από το Γ φέρουμε κάθετες στις Ox, Oy που τις τέμνουν στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και παίρνουμε τμήματα ΓΔ = Γ΄Δ και ΓΕ =Γ″Ε (συμμετρικά). Τότε η περίμετρος του ΑΒΓ είναι

ΓΆ + ΑΒ +Β Γ″ > Γ΄Γ″ = 2ΟΓ.

Σχόλιο:

Τα σημεία Γ΄, Ο,Γ΄΄ είναι συνευθειακά .

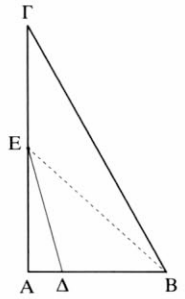
(Άσκηση 6-§ 3.8-3.9).



§ 3.13

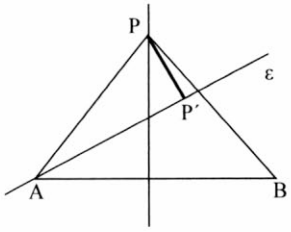
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Επειδή ΕΑ κάθετος στην ΑΒ και ΑΔ<ΑΒ θα είναι ΔΕ<ΕΒ (1).
Επίσης ΒΑ κάθετος στην ΑΓ και ΑΕ<ΑΓ. Άρα συνεπάγεται ότι ΕΒ<ΒΓ (2).
Από (1),(2) προκύπτει ότι ΔΕ<ΒΓ.



2. Το ΑΗ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, (σχ. Βιβλίου), άρα ΑΒ=ΑΓ. Τα τμήματα ΑΓ και ΑΔ είναι πλάγια και επειδή ΗΓ<ΗΔ και ΑΗ κάθετος προκύπτει ότι ΑΓ<ΑΔ.

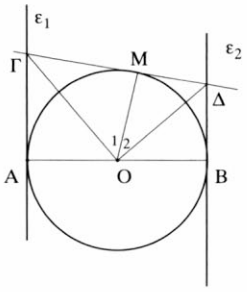
3. i) Έστω Ρ΄ το ίχνος της καθέτου από το Ρ στην ε. Αν το Ρ΄ δεν ταυτίζεται με το Α τότε θα είναι ΡΒ = ΡΑ > ΡΡ΄.
ii) Θα πρέπει το Ρ΄ να ταυτίζεται με το Α, επομένως η ε να είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΡΑ, στο σημείο Α.



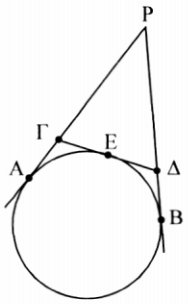
§ 3.14 - 3.15
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Οι χορδές είναι ίσες γιατί έχουν ίσα αποστήματα, αφού το απόστημα κάθε χορδής ισούται με την ακτίνα ρ του μικρού κύκλου.

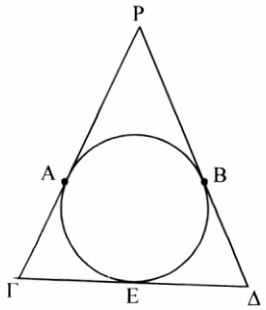
2. Έστω Μ το σημείο επαφής της ε με τον κύκλο. Η ΟΓ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}M$ και η ΟΔ διχοτόμος της $M\hat{O}B$, οπότε $O\Gamma \perp O\Delta \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = 90^{o}$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).



3. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:
Για το Σχ. 1 έχουμε ότι: ΡΓ + ΓΔ + ΔΡ = ΡΑ – ΑΓ + ΓΕ + ΕΔ + ΡΒ – ΡΔ = 2ΡΑ
Για το Σχ. 2 έχουμε ότι: ΡΓ + ΓΔ + ΔΡ = ΡΑ + ΑΓ + ΓΕ + ΕΔ + ΒΡ = 2(ΡΑ + ΓΔ).



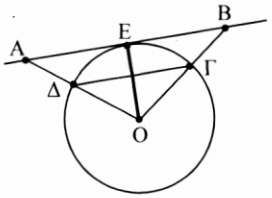
Σχήμα 1



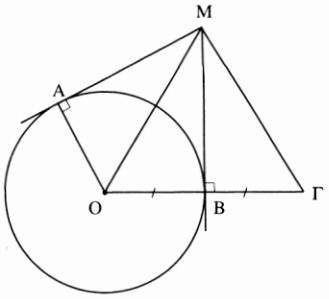
Σχήμα 2

Αποδεικτικές Ασκήσεις

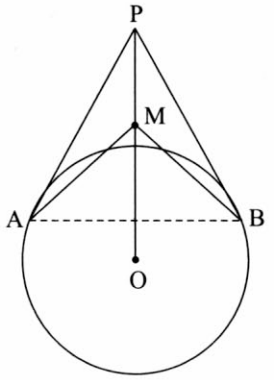
1. Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή ΟΑ=ΟΒ (1). Όμως και ΟΔ=ΟΓ (2) (ως ακτίνες). Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ΑΔ=ΒΓ.



2. Φέρουμε τη ΜΟ, οπότε οι γωνίες ΑΜΟ και ΟΜΒ είναι ίσες. Το τρίγωνο ΟΜΓ είναι ισοσκελές, οπότε η ΜΒ είναι και διχοτόμος, άρα $O\hat{M}B = B\hat{M}\Gamma$. Άρα $A\hat{M}\Gamma = 3B\hat{M}\Gamma$.



3. Τα ευθύγραμμα τμήματα PA και PB είναι ίσα, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από ένα σημείο προς τον κύκλο. Επομένως το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές, οπότε $P\hat{A}B = P\hat{B}A$. Επίσης, η PO είναι μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB, οπότε MA = MB και επομένως $M\hat{A}B = M\hat{B}A$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.

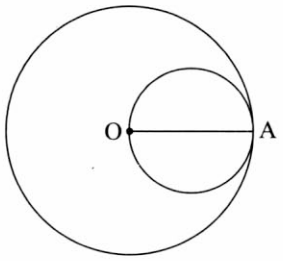


§ 3.16

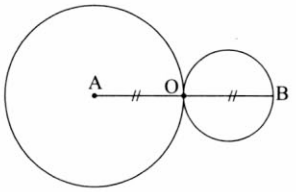
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Ο ένας κύκλος εσωτερικός του άλλου.
ii) Εφάπτονται εσωτερικά.
iii) Τέμνονται.
iv) Εφάπτονται εξωτερικά.
v) Ο ένας κύκλος εξωτερικός του άλλου.

2. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

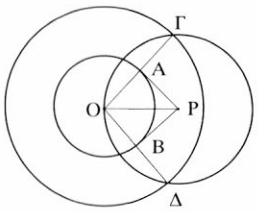


3. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



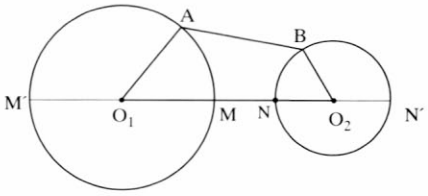
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Για να τέμνονται οι κύκλοι (Ο,2R) και (Ρ,ΡΟ) πρέπει να ισχύει: 2R-ΡΟ<ΡΟ<ΡΟ+2R, γιατί ΡΟ<2R.
Η δεξιά ανισότητα προφανώς ισχύει. Για την αριστερή έχουμε: $2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \Leftrightarrow PO > R$
που ισχύει αφού Ρ εξωτερικό σημείο του (Ο,R).
ii) Επειδή (ΟΓ)=2R>R το Γ είναι εξωτερικό σημείο του (Ο,R) άρα η ΟΓ τέμνει τον (Ο,R) στο Α. Όμοια η ΟΔ τέμνει τον (Ο,R) στο Β.



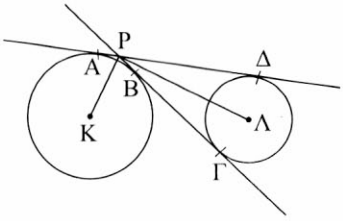
iii) Επειδή (ΟΑ)=R και (ΟΓ)=2R το Α είναι μέσο της χορδής ΟΓ του κύκλου (Ρ,ΡΟ) οπότε ΡΑ⊥ΟΓ, επομένως ΡΑ εφαπτόμενη του (Ο,R). Όμοια αποδεικνύεται ότι και η ΡΒ είναι εφαπτόμενη του (Ο,R).

2. i) Επειδή $O_1O_2>R_1+R_2$ ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.
ii) • Έστω ότι το Α δεν συμπίπτει με το Μ ή το Β δεν συμπίπτει με το Ν. Τότε σύμφωνα με το σχόλιο της § 3.11 έχουμε:
$O_1O_2<O_1A+AB+BO_2$ ή
$R_1+MN+R_2<R_1+AB+R_2$ ή $MN<AB$.

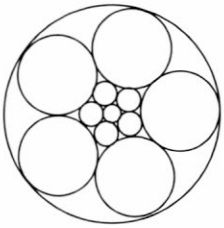


Όταν Α≡Μ και Β≡Ν τότε ΜΝ=ΑΒ. Άρα γενικά ΜΝ≤ΑΒ.
• Έστω πάλι ότι το Α δεν συμπίπτει με το Μ΄ ή το Β με το Ν΄ τότε:
$AB<AO_1+O_1O_2+O_2B$ ή $AB<M'O_1+O_1O_2+O_2N'$ ή $AB<M'N'$.
Όταν Α≡Μ΄ και Β≡Ν΄ τότε ΑΒ=Μ΄Ν΄, γενικά λοιπόν θα ισχύει ΑΒ≤Μ΄Ν΄.

3. Η ΚΡ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΡΒ και η ΡΛ διχοτόμος της ΓΡΔ. Όμως οι γωνίες $A\hat{P}B$ και $B\hat{P}\Delta$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, επομένως $K\hat{P}\Lambda = 90°$.



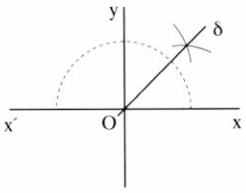
4. Η απάντηση είναι καταφατική και οι κύκλοι φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



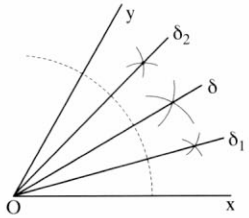
§ 3.17-3.18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Κατασκευάζουμε γεωμετρικά μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής. Τότε $(x\hat{O}\delta) = 45°$.



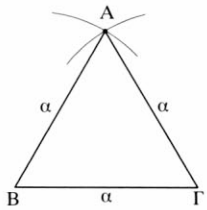
2. Έστω γωνία $x\hat{O}y$. Κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής και στη συνέχεια τις διχοτόμους $O\delta_1$ και $O\delta_2$ των $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ αντίστοιχα.



3. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και γράφουμε τους κύκλους (Β, α) και (Γ, α). Αν Α είναι ένα κοινό σημείο των κύκλων αυτών το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

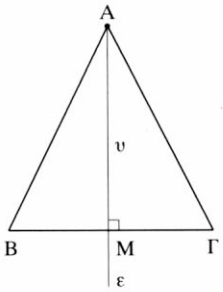
- Πράγματι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με ΒΓ = α, από υπόθεση, ΑΒ = ΑΓ = α, ως ακτίνες των κύκλων (Β, α) και (Γ, α).

- Επειδή α – α < α < α + α, οι κύκλοι τέμνονται και το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Το τρίγωνο Α΄ΒΓ με Α΄ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Β, α) και (Γ, α) είναι ίσο με το ΑΒΓ, επομένως η λύση είναι μοναδική.

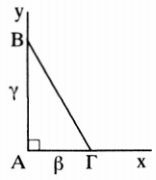


4. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο ε αυτού. Αν η ε τέμνει τη ΒΓ στο Μ και πάνω σ' αυτήν πάρουμε σημείο Α ώστε ΑΜ = υ, τότε το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

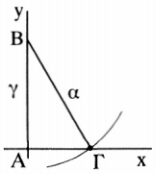
- Πράγματι, ΑΒ = ΑΓ και προφανώς ΒΓ = α και ΑΜ = υ.
- Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.



5. α) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στις πλευρές της Ax, Ay παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Β ώστε ΑΓ = β και ΑΒ = γ. Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.



β) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στη Ay παίρνουμε σημείο Β ώστε ΑΒ = γ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο (Β, α) που τέμνει την Ax στο Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προφανώς το ζητούμενο και υπάρχει λύση όταν α > γ.

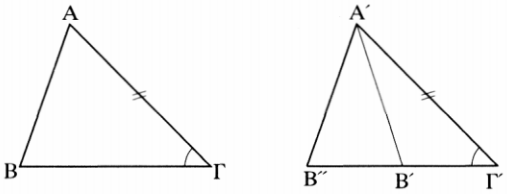


Γενικές Ασκήσεις

1. i) Στην προέκταση της Γ΄Β΄ θεωρούμε σημείο Β΄΄ ώστε Γ΄Β΄΄ = ΓΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄΄Γ΄ είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}''$ (1) και Α΄Β΄΄ = ΑΒ (2).

Όμως από υπόθεση $\hat{B} + \hat{B}' = 180°$ η οποία, λόγω της (1) γίνεται

$$\hat{B}'' + \hat{B}' = 180° \Leftrightarrow \hat{B}'' = 180° - \hat{B}' = \hat{B}'_{εξ}$$



δηλαδή $\hat{B}'' = \hat{B}'_{εξ}$ και επομένως Α΄Β΄΄ = Α΄Β΄ η οποία με τη βοήθεια της (2) δίνει Α΄Β΄= ΑΒ.

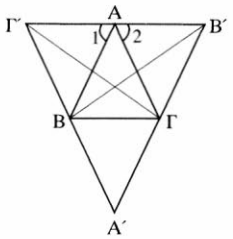
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε:

- μια πλευρά και μια προσκείμενη σ' αυτή γωνία του ενός να είναι ίση με μια πλευρά και μια προσκείμενη γωνία του άλλου, αντίστοιχα και
- οι μη προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες των τριγώνων, είναι παραπληρωματικές.

Τότε, οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες προσκείμενες γωνίες, είναι ίσες.

2. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τα τρίγωνα ΑΒ΄Γ και ΑΒΓ΄ είναι ισόπλευρα και ίσα μεταξύ τους, οπότε θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \varphi$ (1).

Τα τρίγωνα ΒΑΒ΄ και Γ΄ΑΓ έχουνε ΑΓ΄ = ΑΒ, ΑΓ = ΑΒ΄ και $B\hat{A}B' = \Gamma'\hat{A}\Gamma = \hat{A} + \varphi$ άρα είναι ίσα και επομένως ΒΒ΄ = ΓΓ΄. Όμοια αποδεικνύεται ότι ΒΒ΄ = ΑΑ΄.

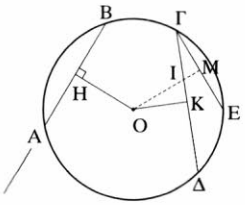


3. Έστω ότι η χορδή ΓΔ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ. Μεταφέρουμε την ΑΒ σε ίση χορδή ΓΕ, οπότε το απόστημα ΟΗ της ΑΒ ισούται με το απόστημα ΟΜ της ΓΕ. Αφού τα σημεία Ο και Ε βρίσκονται εκατέρωθεν της ΓΔ, η ΟΜ τέμνει τη ΓΔ σε σημείο Ι που είναι εσωτερικό του τμήματος ΟΜ. Τότε έχουμε ότι ΟΚ< ΟΙ < ΟΜ = ΟΗ.

Αντίστροφα. Έστω ότι ΟΚ < ΟΗ. Τότε:

- αν ΑΒ = ΓΔ θα ήταν ΟΚ = ΟΗ (άτοπο).
- αν ΑΒ > ΓΔ θα ήταν ΟΚ > ΟΗ (άτοπο).

άρα ΑΒ < ΓΔ.



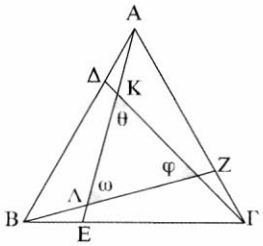
4. Έχουμε $\overset{\Delta}{ABE} = \overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ (ΑΒ = ΒΓ, ΒΕ = ΓΖ, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$).

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1). Επίσης $\overset{\Delta}{ABZ} = \overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$ (ΑΒ = ΒΓ, $\hat{A} = \hat{B}$, ΑΖ = ΒΔ). Άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Από (1), (2), αφού ΑΒ = ΒΓ προκύπτει ότι $\overset{\Delta}{AB\Lambda} = \overset{\Delta}{B\Gamma M}$.

Επομένως $\hat{\Lambda} = \hat{M}$, οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

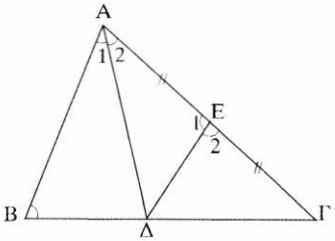
Όμοια $\hat{\omega} = \hat{\theta}$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \hat{\theta}$.



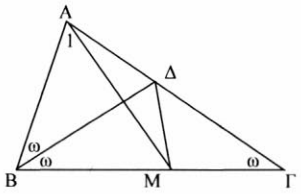
5. Φέρουμε ΑΔ διχοτόμο. Έστω Ε το μέσο της ΑΓ. Τότε $\overset{\Delta}{AB\Delta} = \overset{\Delta}{A\Delta E}$ (ΑΔ κοινή, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$).

Άρα $\hat{B} = \hat{E}_1 < 90°$, οπότε $\hat{E}_2 > 90°$.

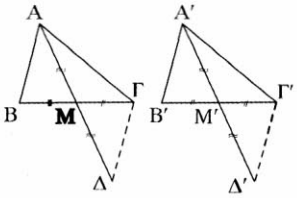
Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΔΕΓ έχουν: ΔΕ κοινή, ΑΕ = ΕΓ, $\hat{E}_2 > \hat{E}_1$. Άρα ΔΓ > ΑΔ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{A}_2 > \hat{\Gamma}$ ή $\frac{\hat{A}}{2} > \hat{\Gamma}$.



6. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β. Τότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές και η ΔΜ ύψος και διχοτόμος, οπότε $\Delta\hat{M}B = 1\llcorner$. Τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΒΜΔ είναι ίσα (Π-Γ-Π), οπότε $B\hat{M}\Delta = B\hat{A}\Delta = 1\llcorner$.

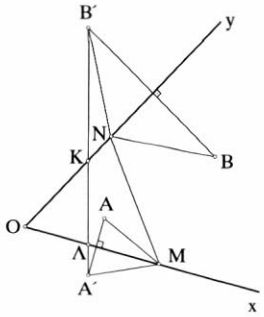


7. Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ = Α΄Β΄, ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΜ = Α΄Μ΄.
Προεκτείνουμε τις ΑΜ, Α'Μ' κατά τμήματα ΑΜ = ΜΔ και Α'Μ' = Μ΄Δ΄.



Τότε $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{M\Gamma\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A'B'M'} = \overset{\Delta}{M'\Gamma'\Delta'}$, οπότε
ΓΔ = ΑΒ και Γ΄Δ΄ = Α΄Β΄.
Επομένως τα τρίγωνα ΑΓΔ και Α΄Γ΄Δ΄ είναι ίσα (Π-Π-Π). Άρα ΓΜ = Γ΄Μ΄, οπότε ΒΓ = Β΄Γ΄. Άρα $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ (Π-Π-Π).

8. Από συμμετρία έχουμε ότι: ΑΜ = Α΄Μ και ΒΝ = Β΄Ν, οπότε ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄, δηλαδή το ζητούμενο. Φέρνουμε το Α΄Β΄. Σύμφωνα με το σχόλιο της §3.11 έχουμε Α΄Β΄ ≤ Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄ δηλαδή η μικρότερη τιμή του αθροίσματος Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄ είναι το Α΄Β΄. Αυτό θα συμβεί όταν τα Μ, Ν βρεθούν πάνω στο Α΄Β΄ και επειδή ανήκουν και στις Ox, Oy αντίστοιχα, πρέπει τα Μ,Ν, να ταυτιστούν με τα Κ,Λ. αντίστοιχα.

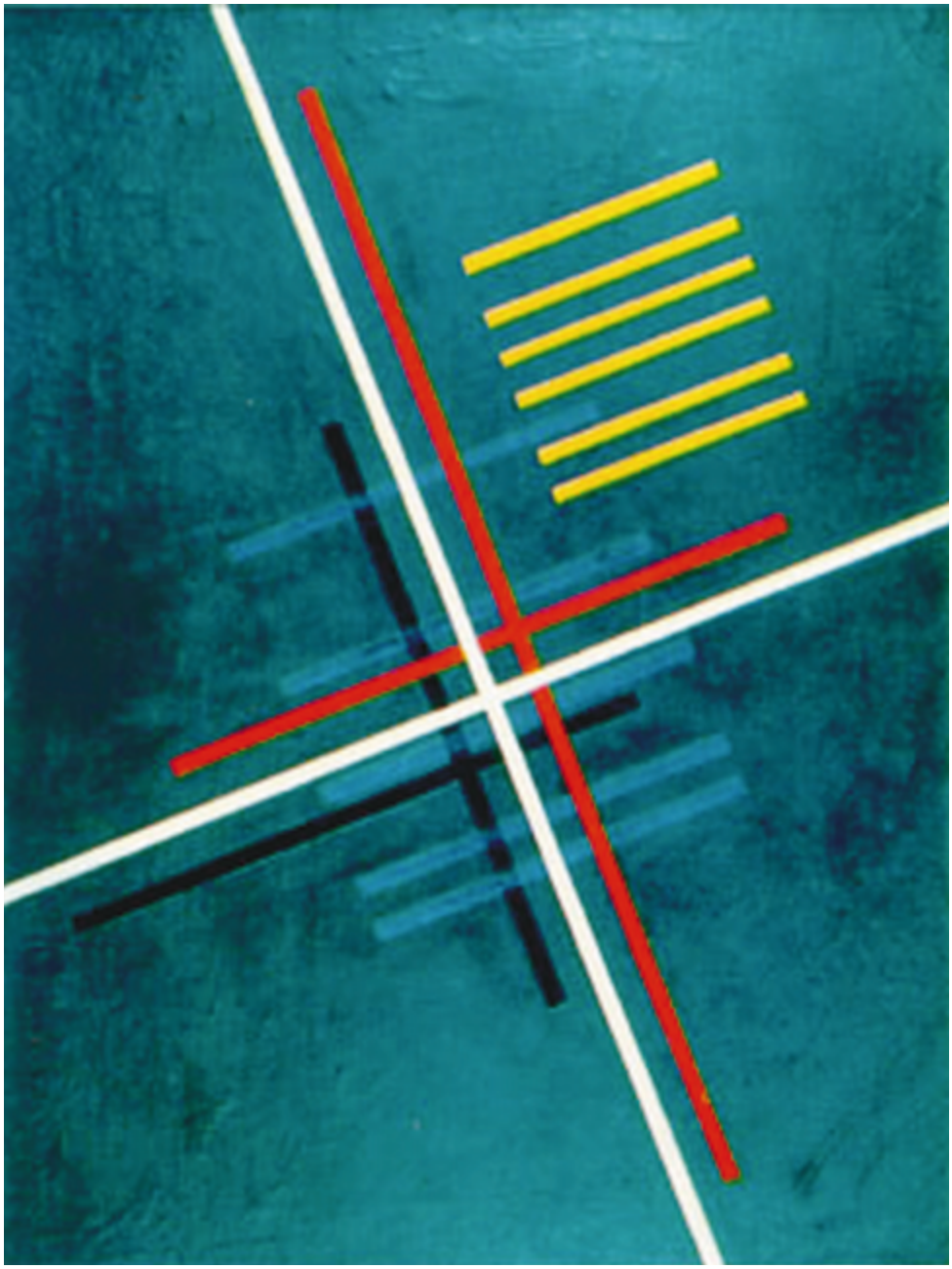


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράλληλες Ευθείες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις παράλληλες ευθείες. Αρχικά, με βάση τις γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες και μία τέμνουσα θα κατασκευάσουμε από σημείο εκτός ευθείας μία παράλληλη προς αυτή.

Στη συνέχεια, θα δεχθούμε ως αξίωμα το αίτημα παραλληλίας, που είναι ισοδύναμο με το Ευκλείδειο αίτημα και θα μελετήσουμε τις συνέπειές του στα τρίγωνα.



László Moholy-Nagy, *(Ούγκρος, 1895-1946), «Χρώμα -δικτύωμα νο.1» 1922.*

4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.3, δύο **διαφορετικές** ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

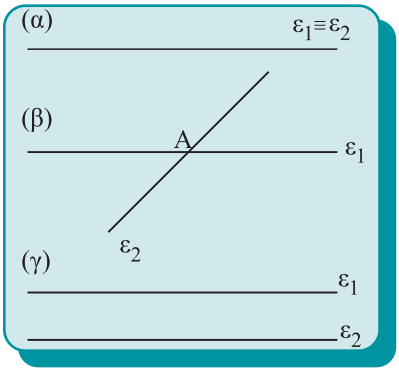
Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

i) ταυτίζονται (σχ.1α),
ii) τέμνονται (σχ.1β),
iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).

Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται ***παράλληλες***, ώστε:

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Σχήμα 1

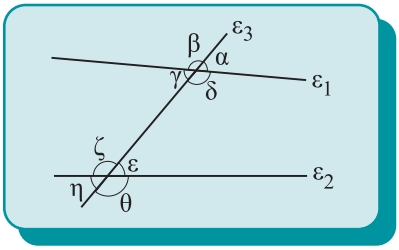
4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

Οι γωνίες γ, δ, ε, ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1, ε_2 λέγονται ***"εντός"***, ενώ οι γωνίες α, β, η, θ λέγονται ***"εκτός"***. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται ***"επί τα αυτά μέρη"***, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται ***"εναλλάξ"***.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται ***εντός εναλλάξ***, οι γωνίες ε και α λέγονται ***εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη***, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται ***εντός και επί τα αυτά μέρη***.

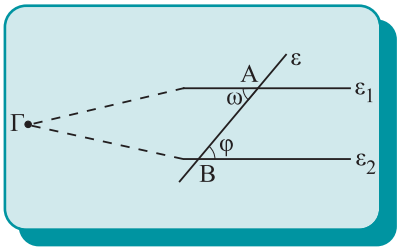
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γωνίες, θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που εξασφαλίζει την ύπαρξη παράλληλων ευθειών.



Σχήμα 2

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.



Σχήμα 3

Απόδειξη

Έστω ότι ω = φ. Αν οι ευθείες $ε_1$,$ε_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι άτοπο. (§ 3.10)

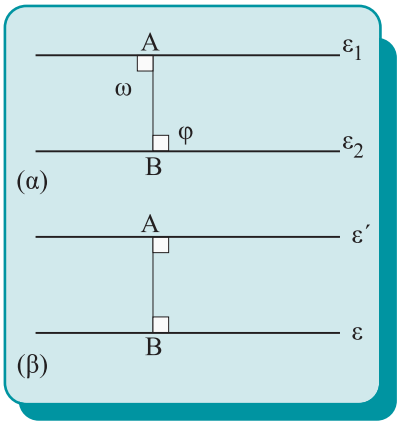
Άρα $ε_1//ε_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Σχήμα 4

Απόδειξη

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ.4α) είναι ορθές, οπότε ω = φ. Άρα $ε_1//ε_2$.

• Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες.

Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής (σχ.4β). Φέρουμε την ΑΒ⊥ε και ονομάζουμε ε΄ την ευθεία που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α. Τότε ε΄//ε (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΒ).

Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε΄ που διέρχεται από ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι η ευθεία αυτή είναι **μοναδική**, δηλαδή:

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω αξίωμα είναι ισοδύναμο με το 5ο αίτημα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη (Ευκλείδειο αίτημα).

Το Ευκλείδειο αίτημα ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της Γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

(βλ. Ιστορικό σημείωμα, σελ. 90)

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

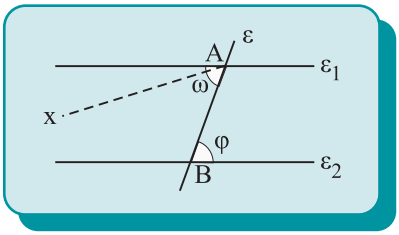
Άμεσες συνέπειες του αιτήματος παραλληλίας είναι οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση Ι

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ και ε μια τέμνουσα (σχ. 5). Θα αποδείξουμε π.χ. ότι ω = φ. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Ax ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax//\varepsilon_2$ γιατί τεμνόμενες από την AB σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την ε_2, που είναι άτοπο. Άρα ω = φ.



Σχήμα 5

Πορισμα

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

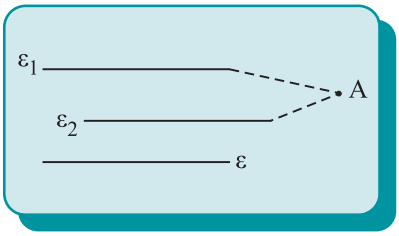
ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Πρόταση ΙΙ

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1//\varepsilon$ και $\varepsilon_2//\varepsilon$, τότε $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.

Απόδειξη

Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονταν σε σημείο A, θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε, που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.



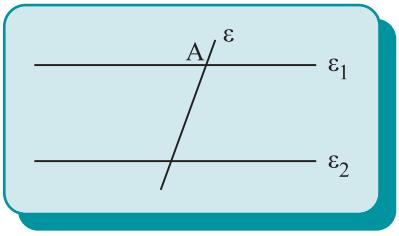
Σχήμα 6

Πρόταση ΙΙΙ

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την ε_1 στο A. Αν η ε δεν έτεμνε την ε_2, θα ήταν $\varepsilon//\varepsilon_2$ και έτσι θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε_2, πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την ε_2.



Σχήμα 7

Πορισμα

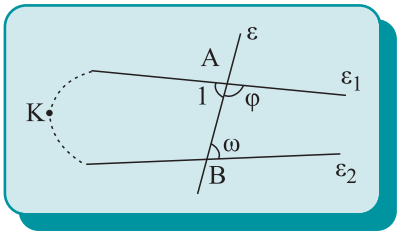
Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση IV

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Απόδειξη

Έστω ότι η ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Α και Β (σχ. 8) αντίστοιχα και ότι $φ + ω \neq 2∟$. Τότε οι $ε_1$ και $ε_2$ δεν είναι παράλληλες, αφού $φ + ω \neq 2∟$ (Πόρισμα σελ. 77). Έστω ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε σημείο Κ, προς το μέρος της τέμνουσας, που δεν περιέχει τις γωνίες ωκαι φ. Τότε, όμως, η εξωτερική γωνία ω του τριγώνου ΑΚΒ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{A}_1$, δηλαδή $ω > \hat{A}_1 = 2∟ - φ$ ή $ω + φ > 2∟$, που είναι άτοπο. Άρα οι $ε_1$,$ε_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

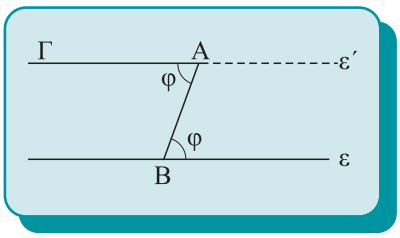
*Η πρόταση IV αποτελεί **βασικό κριτήριο** με το οποίο εξετάζουμε αν δύο ευθείες τέμνονται.*

Πορισμα

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών. (βλέπε § 3.18 – Πρόβλημα 2)

4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας

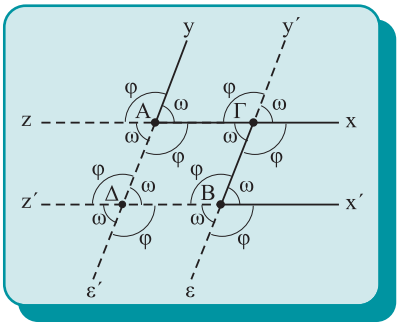
Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχει ευθεία ε΄, η οποία διέρχεται από ένα σημείο Α και είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία ε. Για την κατασκευή της ε΄ φέρουμε από το Α ένα πλάγιο τμήμα ΑΒ προς την ε και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία που σχηματίζει το ΑΒ με την ε. Μεταφέρουμε τη γωνία φ (§ 2.6) ώστε να έχει κορυφή το Α, η μια πλευρά της να είναι η ΑΒ και η άλλη πλευρά της ΑΓ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η γωνία φ. Επειδή $Γ\hat{A}B = φ$ έχουμε ΑΓ//ε, αφού τεμνόμενες από την ΑΒ, σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Έτσι η ευθεία ΑΓ είναι η ζητούμενη ευθεία ε΄.



Σχήμα 9

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

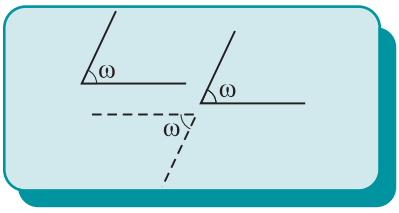
Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $x\hat{A}y$ και $x'\hat{B}y'$ με $Ax//Bx'$ και $Ay//By'$, δηλαδή δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους, μία προς μία παράλληλες. Αν προεκτείνουμε τις Bx' και By' θα τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Έτσι όλες οι γωνίες του σχήματος 10 λόγω των παραλλήλων θα είναι ίσες με ω ή φ.



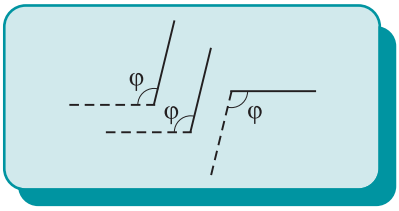
Σχήμα 10

Παρατηρούμε ότι:

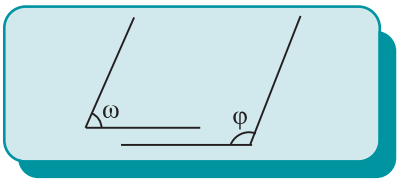
- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **οξείες** (σχ.11), είναι ίσες.
- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **αμβλείες** (σχ.12), είναι ίσες.
- Αν η μία γωνία είναι **οξεία** και η άλλη **αμβλεία** (σχ.13), είναι παραπληρωματικές.



Σχήμα 11



Σχήμα 12



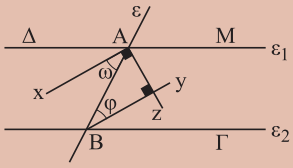
Σχήμα 13

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ε_1 και ε_2 δύο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία ε.
Να αποδειχθεί ότι
(i) Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
(ii) Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.



Σχήμα 14

Απόδειξη

(i) Έστω Ax, By οι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα.

Τότε $\omega = \frac{\Delta\hat{A}B}{2}$ και $\varphi = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2}$. Αλλά $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\omega = \varphi$. Οι ω και φ όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες των ευθειών Ax και By με τέμνουσα την AB. Άρα $Ax//By$.

(ii) Αν Az διχοτόμος της $M\hat{A}B$, τότε $Az \perp Ax$ (ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών). Αφού $Ax//By$, θα είναι και $Az \perp By$.

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το Ευκλείδειο αίτημα για να μελετήσουμε τους κύκλους που σχετίζονται με ένα τρίγωνο.

• Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

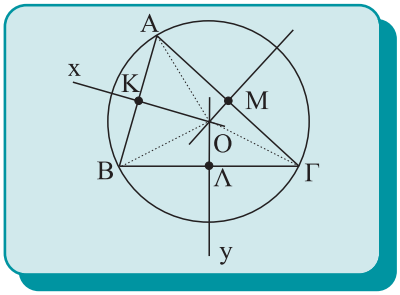
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται ***περίκεντρο***.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ , Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ=ΟΒ. Επίσης ΟΒ=ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ=ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο,ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



Σχήμα 15

• Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ενας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***εγγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται ***έγκεντρο***, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

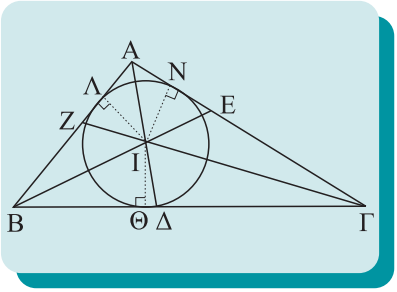
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\angle$. (§ 4.2 – Πρόταση IV)

Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ. Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



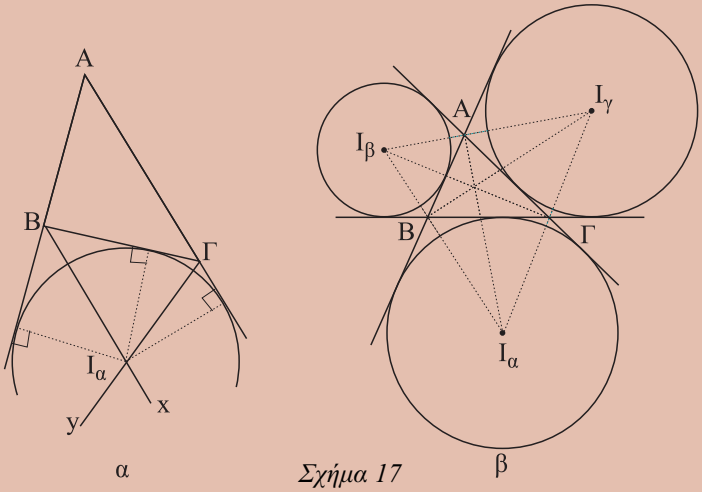
Σχήμα 16

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ***Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου***

Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***παρεγγεγραμμένος*** και το κέντρο του ***παράκεντρο*** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε I_α, I_β, I_γ, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι (σχ.17α,β).

Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων.

Απόδειξη



Σχήμα 17

Ας θεωρήσουμε τις διχοτόμους Βx και Γy των δύο εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{Γ}_{εξ}$ αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Οι Βx και Γy τέμνονται σε σημείο $I_α$, αφού ισχύει ότι:

$$x\hat{B}Γ + y\hat{Γ}B = \frac{\hat{B}_{εξ} + \hat{Γ}_{εξ}}{2} = 2∟ - \frac{\hat{B} + \hat{Γ}}{2} < 2∟.$$

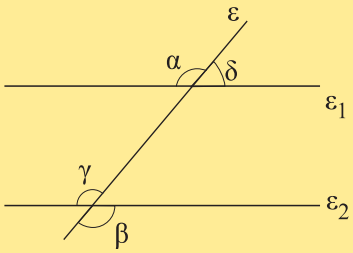
Το $I_α$ ισαπέχει από τη ΒΓ και την προέκταση της ΑΒ, καθώς και από την προέκταση της ΑΓ. Επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

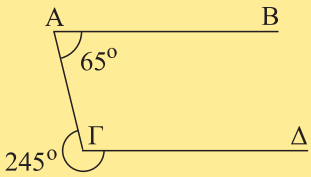
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;*

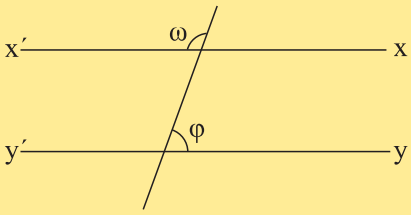
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες $\hat{γ}$ και $\hat{δ}$;



2. *Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.*



3. *Αν ω = 120° – θ και φ = 60° + θ να εξηγήσετε γιατί xx΄//yy΄.*



4. *Να αναφέρετε πέντε (5) τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.*

5. *Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι:*

i) συμπληρωματικές,

ii) ίσες,

iii) παραπληρωματικές,

iv) κανένα από τα παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.*

2. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Ox τέμνει την Oy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Oy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Ox στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ,ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ.*

5. *Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.*

6. *Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε Ox⊥OM. Να αποδείξετε ότι Ox//AB.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσος του ΑΜ. Φέρουμε Γx⊥ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}Γ$.*

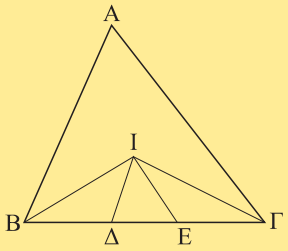
2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ+ΑΓ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η εξωτερική διχοτόμος του Ax. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ//Ax που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.*

4. *Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία*

Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.

5. *Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.*



Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε,ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ,ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.*

2. *Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx,Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.*

3. *Από το παράκεντρο I_α τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ – ΒΔ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

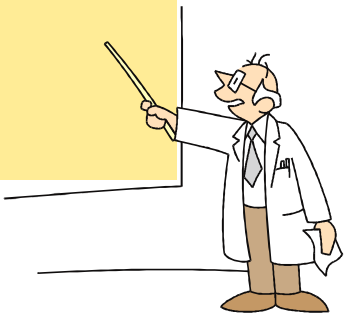
i) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

ii) ΒΕ+ΓΖ = σταθερό.

iii) Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:

α) $BE = \Gamma Z = \dfrac{A\Gamma + AB}{2}$,

β) $AE = AZ = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.



4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

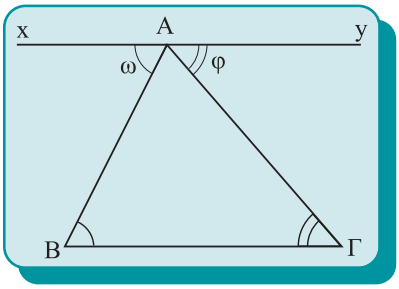
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\angle$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle.$$



Σχήμα 18

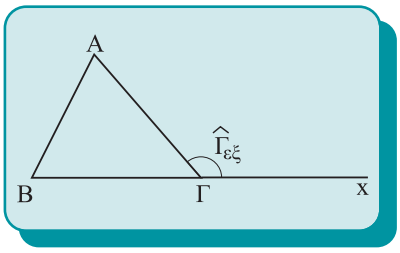
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.



Σχήμα 19

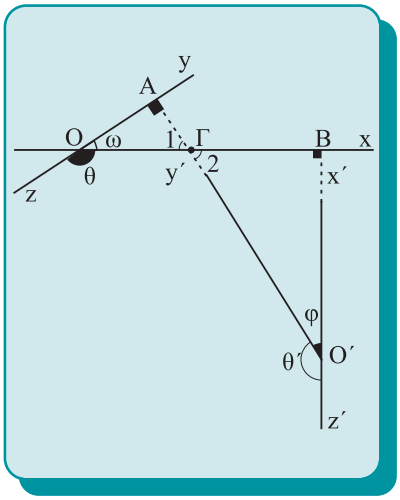
Απόδειξη

i) Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 2\angle$ και $\hat{\Gamma}_{εξ} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, οπότε

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{εξ} + \hat{\Gamma} \quad ή \quad \hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}.$$

ii) – iv) Προφανή.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες



Σχήμα 20

Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y = ω$ και $x'\hat{O}'y' = φ$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και Ο΄ΒΓ έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1\angle$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε ω = φ.

Πορίσματα

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

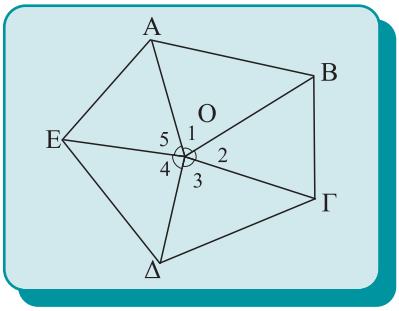
i) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $θ + ω = 2\angle$, $θ' + φ = 2\angle$, οπότε $θ = θ'$, αφού ω = φ.

ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $θ + ω = 2\angle$, οπότε $θ + φ = 2\angle$, αφού ω = φ.

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι (2·5) ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4+\hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

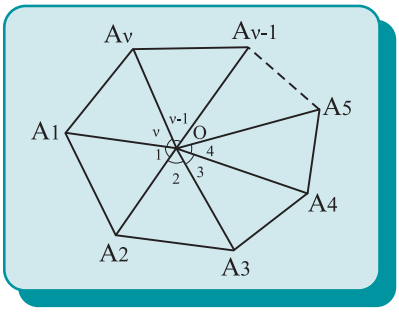
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = (2\cdot 5 - 4) \text{ ορθές.}$$



Σχήμα 21

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται ν τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2ν ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+ \ldots +\hat{O}_\nu = 4$ ορθές έχουμε:

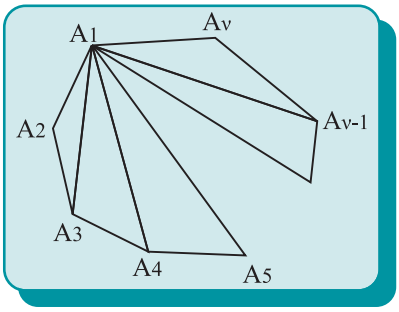
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\ldots+\hat{A}_\nu = (2\nu - 4) \text{ ορθές.}$$



Σχήμα 22

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πρέπει:
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν-4 ορθές.

Άλλη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ με ν πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1 όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε ν-2 τρίγωνα, γιατί σε καθεμιά από τις πλευρές του, εκτός των A_1A_2 και A_1A_ν που διέρχονται από την κορυφή A_1, αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των ν-2 τριγώνων είναι 2(ν-2)=(2ν-4) ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές.



Σχήμα 23

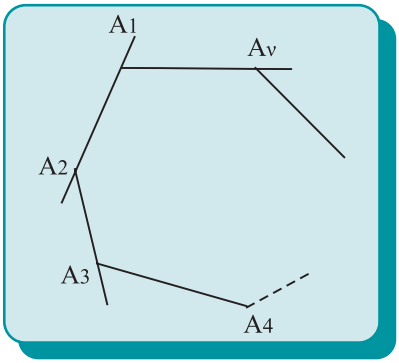
Πορισμα

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές.

Απόδειξη

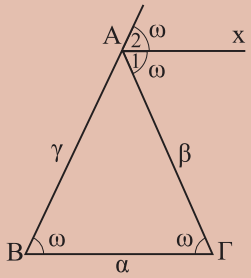
Έχουμε $\begin{cases} \hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2\angle \\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2\angle \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} + \hat{A}_\nu = 2\angle \end{cases}$ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:

$$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_\nu) = 2\nu\angle \text{ ή}$$
$$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (2\nu - 4)\angle = 2\nu\angle \text{ ή}$$
$$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 4\angle.$$



Σχήμα 24

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές , αν και μόνο αν Αx//ΒΓ.

Απόδειξη

(i) Αν β=γ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$.

Όμως $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\omega$, οπότε $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \omega$ ή $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \omega$. Άρα Αx//ΒΓ, αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

(ii) Αν Αx//ΒΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), οπότε β=γ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

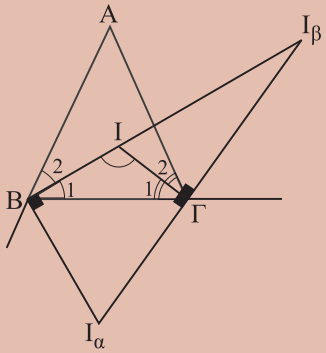
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι

(i) Η γωνία των δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90° + \frac{\hat{A}}{2}$.

(ii) Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$.

(iii) Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90° - \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη



Οι εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Οι εξωτερικές διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_α και η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ με την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_β.

(i) Από το τρίγωνο ΒΙΓ παίρνουμε:

$B\hat{I}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180°$ ή $B\hat{I}\Gamma = 180° - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1$ ή

$B\hat{I}\Gamma = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή $B\hat{I}\Gamma = 90° + 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή

$\mathbf{B\hat{I}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2}}$ (επειδή $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90°$). (1)

(ii) Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τέμνονται **κάθετα**. Έτσι στο τρίγωνο $I\Gamma I_\beta$ είναι: $\hat{\Gamma} = 90°$ και $B\hat{I}\Gamma = 90° + \hat{I}_\beta$ (2) (ως εξωτερική γωνία).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\beta = \frac{\hat{A}}{2}}$. (3)

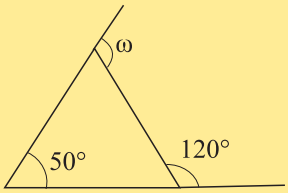
(iii) Όμοια στο τρίγωνο $I_\alpha B I_\beta$ είναι $\hat{B} = 90°$, οπότε $\hat{I}_\alpha + \hat{I}_\beta = 90°$ ή $\hat{I}_\alpha = 90° - \hat{I}_\beta$. (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\alpha = 90° - \frac{\hat{A}}{2}}$.

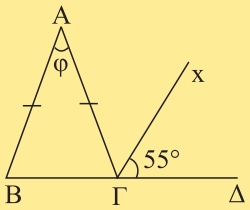
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.*



2. *Αν ΑΒ = ΑΓ και Γx διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}\Delta$, να υπολογίσετε τη γωνία φ (βλ. σχήμα).*



3. *Υπάρχει κυρτό ν-γωνο τέτοιο, ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του να ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του;*

4. *Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.*

5. *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:*

α) 180° β) 270° γ) 360° δ) 540°

ε) κανένα από τα παραπάνω

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

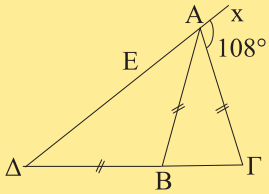
1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).*

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν Ι το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $B\hat{I}\Gamma$. (Εφαρμογή 2 – § 4.8)*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{εξ} = 144°$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$.*

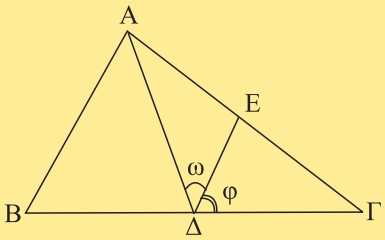
5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι:*



ΑΒ = ΑΓ = ΔΒ και $x\hat{A}\Gamma = 108°$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

6. *Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{A} = 90°$, ΑΔ διχοτόμος, ΔΕ//ΑΒ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.*



7. *Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900°. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}_{εξ} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*

i) $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,

ii) $A\hat{\Delta}B = 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$, $A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.*

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται σε σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $A\hat{E}B = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.*

5. *Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη ΔΕ⊥ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = E\hat{\Delta}\Gamma$.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ, στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΓ = ΓΗ.*

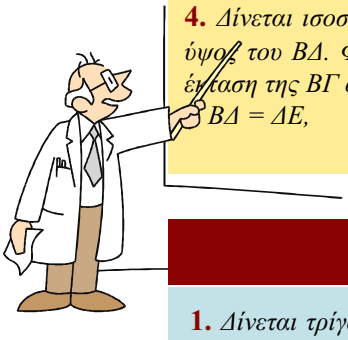
Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ⊥ΒΓ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $E\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή -προς το μέρος του Α- τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.*

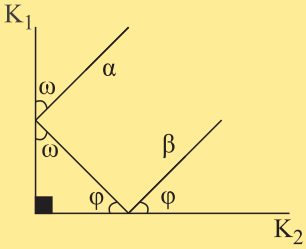
4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΒΔ. Φέρουμε ΔΗ⊥ΑΒ, που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:*
i) ΒΔ = ΔΕ, ii) ΒΓ > ΓΕ.



5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ, προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα ΒΖ=ΑΓ και ΓΗ=ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΖ=ΑΗ, ii) ΑΖ⊥ΑΗ.

6. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} > \hat{\Gamma}$ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι* $\varphi = \dfrac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}$.

7. *Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1,K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;*



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ = 60° και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι* $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$.

2. *Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ= α) και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΒΕ =* $\dfrac{1}{3}\alpha$. *Να αποδείξετε ότι ΔΕ⊥ΒΓ.*

3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε Δx⊥ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την προέκτασή της ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΖΓ.*

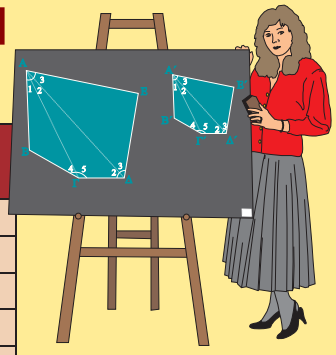
4. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ = 90° και ΒΓ=ΓΔ. Στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ΑΓ⊥ΓΕ.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:*
i) Το ύψος ΑΔ = υ_α σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.
ii) Η διάμεσος ΑΜ = μ_α σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.
iii) Το ύψος υ_α και η διάμεσος μ_α βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου ΑΕ = δ_α.

6. *Τρεις κύκλοι με κέντρα K_1,K_2,K_3 εφάπτονται εξωτερικά στα Α,Β,Γ. Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $K_1K_2K_3$.*

7. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τον εγγεγραμμένο κύκλο του (Ι,ρ) και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του (I_α,ρ_α). Ονομάζουμε Δ,Ε,Ζ και Δ΄,Ε΄,Ζ΄ τα σημεία επαφής των (Ι,ρ) και (I_α,ρ_α) με τις ευθείες ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΖ=ΑΕ=τ – α, ΒΔ=ΒΖ=τ – β, ΓΔ=ΓΕ=τ – γ,
ii) ΑΖ΄=ΑΕ΄= τ,
iii) ΖΖ΄=ΕΕ΄=α , ΔΔ΄= β – γ.

Δραστηριότητες



1. *Να συμπληρώσετε τον πίνακα για κυρτά ν-γωνα.*

αριθμός πλευρών	άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	άθροισμα εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
7		
. . .		
ν	2ν–4 ορθές	4 ορθές

i) *Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου; Εξαρτάται από τον αριθμό των πλευρών ν; Τι ισχύει όταν αυξάνεται το ν;*
ii) *Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου. Να σχολιάσετε τη σχέση του με τον αριθμό των πλευρών ν.*
2. *Να κατασκευάσετε δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες (3 περιπτώσεις). Να εξετάσετε τι ισχύει για τις διχοτόμους τους (παράλληλες, κάθετες κτλ.)*
Να κάνετε το ίδιο για δύο γωνίες με πλευρές κάθετες.

Εργασία

Να υπολογίσετε τις γωνίες ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), το οποίο είναι δυνατόν να χωρισθεί σε δύο άλλα ισοσκελή τρίγωνα.
Υπόδειξη: *Η ευθεία που χωρίζει το ΑΒΓ σε δυο ισοσκελή τρίγωνα πρέπει να διέρχεται από μια κορυφή του τριγώνου. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις: i) με ευθεία ΑΔ από την κορυφή Α.*
ii) με ευθεία ΒΕ από την κορυφή Β.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

Το αίτημα αυτό αποδεικνύεται ισοδύναμο με τις εξής προτάσεις:

(Ε1) Υπάρχει ευθεία α και σημείο Α εκτός αυτής τέτοιο, ώστε από το Α διέρχεται μία μοναδική ευθεία που δεν τέμνει την α.

(Ε2) Υπάρχει τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες.

(Ε3) Το άθροισμα των γωνιών τυχόντος τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

(Ε4) Υπάρχει τρίγωνο, το άθροισμα των γωνιών του οποίου να ισούται με δύο ορθές.

(Ε5) Αν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες, οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.

(Ε6) Τα σημεία που κείνται προς το ίδιο μέρος από δεδομένη ευθεία και σε μία και την αυτή απόσταση, σχηματίζουν ευθεία.

(Ε7) Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αυτές αποκλίνουν η μία από την άλλη από το ένα μέρος, τότε από το άλλο μέρος συγκλίνουν.

(Ε8) Υπάρχουν όμοια τρίγωνα.

(Ε9) Υπάρχουν τρίγωνα με οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος.

(Ε10) Έστω α τυχούσα ευθεία και Α σημείο εκτός αυτής. Τότε στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία α και το σημείο Α υπάρχει όχι περισσότερες από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και δεν τέμνει την ευθεία α (Αξίωμα παραλληλίας).

Το αίτημα του Ευκλείδη ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην αρχαιότητα και το Βυζάντιο. Είναι πιθανό πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη να υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί. Όμως οι διαθέσιμες μαρτυρίες είναι πενιχρότατες και αποσπασματικές. Ενδείξεις υπάρχουν στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, όπου συνδέεται το πρόβλημα των παραλλήλων με την πρόταση (Ε3). Ο Αριστοτέλης ασκεί κριτική στις προσπάθειες μαθηματικών (που δεν κατονομάζονται) να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα ότι υποπίπτουν στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου» (petitio principi), δηλαδή ότι κατά την απόδειξη χρησιμοποιούν πρόταση ισοδύναμη προς την αποδεικτέα. Άλλη πηγή είναι τα «Σχόλια για τις δυσκολίες στην εισαγωγή του βιβλίου του Ευκλείδη» του Ομάρ Χαγιάμ όπου αναφέρει ότι «η αιτία του λάθους των ύστερων επιστημόνων στην απόδειξη αυτής της υπόθεσης είναι ότι δε λάμβαναν υπόψη τους τις αρχές του φιλοσόφου [δηλαδή, του Αριστοτέλη]» και παραθέτει πέντε αρχές, τέσσερις από τις οποίες απαντώνται με λίγο διαφορετική διατύπωση στα «Φυσικά» και το «Περί Ουρανού».

Το πρώτο γνωστό έργο της αρχαιότητας, που λίγες μόλις δεκαετίες μετά τα «Στοιχεία» αναφέρεται στη θεωρία των παραλλήλων, είναι η χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί παραλλήλων», που μνημονεύει ο βιβλιογράφος Ιμπν αλ-Ναντίμ (πέθανε το 993) στο «Βιβλίο της βιβλιογραφίας των επιστημών», μαζί με άλλα έργα του Αρχιμήδη που διασώθηκαν μόνο στα Αραβικά. Το βιβλίο αυτό ήταν πιθανότατα γνωστό στον Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (836-901), συγγραφέα δύο πραγματειών σχετικών με τη θεωρία των παραλλήλων. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, ο οποίος θεωρεί ότι το αίτημα του Ευκλείδη είναι θεώρημα και επιχειρεί να δώσει μια δική του απόδειξη, ο Ποσειδώνιος είχε προτείνει έναν ορισμό των παραλλήλων, διαφορετικό από αυτόν του Ευκλείδη. Παράλληλες ονομάζει τις ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δε συγκλίνουν ούτε αποκλίνουν και όλες οι κάθετες από τα σημεία της μιας προς την άλλη είναι ίσες μεταξύ τους. Ο ορισμός αυτός όμως βασίζεται στο ισοδύναμο αξίωμα (Ε6). Ο Πρόκλος αναφέρεται επίσης εκτεταμένα στις προσπάθειες του Κλαύδιου Πτολεμαίου και άλλων μαθηματικών, τους οποίους δεν κατονομάζει, να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Με την απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος ασχολήθηκε ο Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.). Στα Αραβικά διατηρήθηκαν και οι προσπάθειες κάποιου Αγάνη και του Σιμπλίκιου που στηρίζονται στον ορισμό του Ποσειδωνίου και, επομένως, στο αξίωμα (Ε6).

Η θεωρία των παραλλήλων στα Αραβικά μαθηματικά. Η πρώτη γνωστή προσπάθεια απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στα Αραβικά μαθηματικά έγινε από τον αλ-Τζαουχαρί στο έργο του «Τελειοποίηση του βιβλίου των "*Στοιχείων*"», το περιεχόμενο του οποίου μεταφέρει ο Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί. Όμως στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την ισοδύναμη προς το αποδεικτέο πρόταση ότι «αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε το ίδιο ισχύει όταν οι δύο ευθείες τέμνονται από οποιαδήποτε άλλη ευθεία». Οι πρώτες προσπάθειες αντικατάστασης του Ευκλείδειου αιτήματος με το αξίωμα της ύπαρξης «ισαπεχόντων» ευθειών ανάγονται στον αλ-Ναϊριζί και τον Ιμπν Σίνα (Αβικέννα).

Οι άραβες μαθηματικοί ανέπτυξαν δύο κυρίως προσεγγίσεις στην απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος, που εγκαινιάζονται στο έργο του Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (908-946): τη γεωμετρική και την κινηματική προσέγγιση. Η κινηματική προσέγγιση ακολουθεί το πνεύμα του Αρχιμήδη και αναπτύχθηκε από τον Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Η πρωτοτυπία της μεθόδου του αλ-Χαϊθάμ, την οποία ακολούθησαν συχνά οι γεωμέτρες στη συνέχεια, είναι ότι υποθέτει την ύπαρξη ενός τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες και εξετάζει τις περιπτώσεις η τέταρτη γωνία να είναι οξεία ή αμβλεία, προσπαθώντας να καταλήξει σε αντίφαση με τον ορισμό των παραλλήλων ως «ισαπεχόντων» ευθειών. Η γεωμετρική προσέγγιση αναπτύχθηκε κυρίως από τον Ομαρ Χαγιάμ. Ξεκινώντας από την απόδειξη της πρότασης (Ε2) και με συλλογισμούς συγγενείς με αυτούς του Πρόκλου, αποδεικνύει το Ευκλείδειο αίτημα χωρίς να υποπέσει στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου». Ο εγκυκλοπαιδιστής φιλόσοφος, μαθηματικός και αστρονόμος Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί (1201-1274) στη δική του πρωτότυπη απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων ακολουθεί το ύφος του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, αλλά στηρίζεται σε αξίωμα που αποτελεί ισχυρότερη μορφή του αιτήματος παραλληλίας.

Στη διάρκεια του 13ου αι. συνεχίζονται οι αναζητήσεις απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος. Ο αλ-Χαναφί, ακολουθώντας παλαιότερες τάσεις που εκδηλώνονται στο έργο του αλ-Κιντί, του αλ-Μπιρουνί (973-περ. 1050) και του Ομάρ Χαγιάμ, συνδέουν το πρόβλημα του Ευκλείδειου αιτήματος με την έννοια της επ' άπειρον διαιρετότητας των γεωμετρικών μεγεθών. Ιδιαίτερα διαδεδομένη ήταν η θεωρία των παραλλήλων του αλ-Αμπχαρί (ή αλ-Αμπαχρί, πέθανε το 1263). Συγγενής προς αυτήν ήταν η θεωρία του αλ-Μαγκριμπί. Στις δύο τελευταίες θεωρίες βρίσκει κανείς ίχνη του ύφους των συλλογισμών του Σιμπλίκιου. Στα τέλη του 13ου-αρχές 14ου αι. μια ακόμα αξιοσημείωτη προσπάθεια γίνεται από τον αντ-Ντιν ασ-Σιραζί (1236-1311), μαθητή του αλ-Τουσί.

Παρ' όλες τις προσπάθειες που σκιαγραφήσαμε οι Άραβες μαθηματικοί ήταν πολύ μακριά από την ιδέα ότι είναι δυνατή μια άλλη γεωμετρία. Απλώς προσπαθούσαν να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα από υποθέσεις που θεωρούσαν πιο προφανείς. Στην πορεία των προσπαθειών τους απέδειξαν την ισοδυναμία του Ευκλείδειου αιτήματος με διάφορες προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες με το πέμπτο αίτημα, καθώς και πολλά θεωρήματα που σήμερα εμπίπτουν στο πεδίο της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην Ευρώπη από τον 13ο ως το 18ο αι. Η πρώτη γνωστή απόπειρα απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στη μεσαιωνική Ευρώπη απαντάται το 13ο αι. στο σύγγραμμα του Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280) «Οπτική» ή «Προοπτική» (1572). Βασική πηγή του Βιτέλο είναι το έργο του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Ωστόσο, η απόδειξή του υστερεί ως προς το επίπεδο αυστηρότητας που είχαν φτάσει οι Άραβες μαθηματικοί.

Δύο άλλες απόπειρες απαντώνται το 14ο αι. στα «Σχόλια» του Γερσωνίδη (Levi ben Gerson ή Gersonides, 1288-1344) και στο έργο κάποιου Αλφόνσο, ο οποίος εικάζεται ότι είναι ο Ισπανός ιατρός και συγγραφέας πολεμικών θρησκευτικών έργων Αλφόνσο του Βαλλαντολίντ (1270-1346).

Στις αρχές του 16ου αι. η θεωρία παραλλήλων εξετάζεται στο «Κάτοπτρο αστρονομικό που περικλείει την ανθρώπινη σοφία σε κάθε επιστήμη» του Φ. Μπ. Γκρισογκόνο (1472-1538), που εκδίδεται στη Βενετία το 1507. Το 1574 εμφανίζεται μία πρωτότυπη απόδειξη του πέμπτου αιτήματος από τον Κλάβιο (Clavius (Schlussel), 1537-1612) που εργαζόταν στη Ρώμη και συμμετείχε στην επεξεργασία του Γρηγοριανού ημερολογίου. Η απόδειξη του Κλάβιου στηρίζεται στην πρόταση (Ε6). Η απόδειξή του παρουσιάζει ομοιότητες με αυτές του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, τις οποίες ίσως γνώριζε από δεύτερο χέρι.

Τον 17ο αι. παρατηρείται κάποια ένταση των προσπαθειών στη θεωρία των παραλλήλων, η οποία όμως δεν απέφερε ιδιαίτερα αξιόλογους καρπούς. Δημοσιεύονται το 1603 στην Μπολόνια δύο τομίδια

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

του Πιέτρο Α. Κατάλντι (1548-1626), το 1658 στην Πίζα η επεξεργασμένη από τον Τζ.Α. Μπορέλλι (1608-1679) έκδοση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, και το 1680 ανάλογη έκδοση των «Στοιχείων» από τον Βιτάλε Τζορντάνο (1633-1711). Το 1693 δημοσιεύεται η πραγματεία του Τζ. Ουώλλις (J. Wallis, 1616-1703) «Το πέμπτο αίτημα και ο πέμπτος ορισμός του Βιβλίου VI του Ευκλείδη», το δεύτερο μέρος της οποίας περιέχει μετάφραση μιας απόδειξης που αποδίδεται στον αλ-Τουσί, και στο τρίτο εκτίθεται απόδειξη του Ουώλλις, που βασίζεται στην πρόταση (Ε9), την οποία θεωρεί φυσική «Κοινή Έννοια».

Από την πραγματεία του Ουώλλις γνωρίστηκε με την αποδιδόμενη στον αλ-Τουσί απόδειξη του πέμπτου αιτήματος ο Τζιρόλαμο Σακκέρι (G.G. Saccheri, 1667-1733). Ο Σακκέρι ξεκινώντας από το ισόπλευρο τετράπλευρο με τις δύο ορθές του Ομάρ Χαγιάμ και του αλ-Τουσί αναλύει τις ίδιες τρεις υποθέσεις για τις άλλες δύο γωνίες. Αποκλείει την υπόθεση της οξείας γωνίας επειδή θεωρεί ότι στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση της ορθής γωνίας ισχύει το πέμπτο αίτημα, δηλαδή επειδή αντιφάσκει στα αξιώματα της συνήθους γεωμετρίας του Ευκλείδη. Στην περίπτωση της αμβλείας γωνίας ο Σακκέρι προχωρεί όσο κανείς άλλος πριν από αυτόν στην απόδειξη θεωρημάτων της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Όμως διολισθαίνοντας σε λάθος συλλογισμό κατέληξε σε αντίφαση, οπότε συμπέρανε ότι η περίπτωση της ορθής γωνίας (δηλαδή της Ευκλείδειας γεωμετρίας) είναι η μόνη δυνατή.

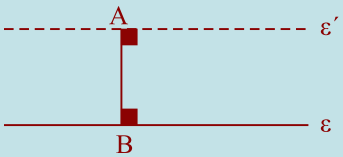
Πιο σημαντική είναι η προσπάθεια του Γερμανού μαθηματικού Λάμπερτ (J.H. Lambert, 1728-1777). Ξεκινώντας από το ίδιο τετράπλευρο του Ομάρ Χαγιάμ και του Σακκέρι αποκλείει χωρίς δυσκολία την υπόθεση της οξείας γωνίας, στη βάση ότι στην περίπτωση αυτή δύο κάθετες στην ίδια ευθεία τέμνονται, πράγμα που, κατά τη γνώμη του, δεν αντιφάσκει στο πέμπτο αίτημα, αλλά στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Επίσης παρατηρεί ότι η υπόθεδη της οξείας γωνίας ισχύει στην επιφάνεια της σφαίρας αν ως ευθείες ληφθούν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας. Εξετάζοντας την υπόθεση της αμβλείας γωνίας ο Λάμπερτ αποδεικνύει ακόμα περισσότερα και από τον Σακκέρι θεωρήματα της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Προσπαθώντας να λάβει κάποια παράδοξα αποτελέσματα παραδέχεται ότι δεν είναι εύκολο να αποκλεισθεί η υπόθεση της αμβλείας γωνίας. Αντίθετα με τον Σακκέρι, ούτε υποπίπτει σε σφάλμα, ούτε συμπεραίνει ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας οδηγεί σε αντίφαση. Αντίθετα, εκφράζοντας κάποια έκπληξη για τις «περίεργες» ιδιότητες των σχημάτων στην περίπτωση αυτή (π.χ. ότι χάνεται η έννοια της ομοιότητας και της αναλογίας των σχημάτων, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αυξάνει όσο μειώνεται η επιφάνεια του τριγώνου, κ.α.) διατυπώνει την ιδιαίτερα βαθιά και διορατική σκέψη ότι «η τρίτη υπόθεση ισχύει σε κάποια φανταστική σφαίρα».

Από τις προσπάθειες μετά τον Λάμπερτ, αξίζει να αναφερθεί η «απόδειξη» του Λ. Μπερτράν (L. Bertrand, 1731-1812), μαθητή του Όυλερ, το 1778, του Α.Μ. Λεζάντρ (1752-1833), που αφιέρωσε σαράντα χρόνια στις έρευνες στη θεωρία των παραλλήλων, του Σ.Ε. Γκούριεφ (1764-1813), και του Φαρκάς Μπόλυαϊ (Farkas Bolyai, 1775-1856), του πατέρα του Γιάνος Μπόλυαϊ, του μετέπειτα δημιουργού της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

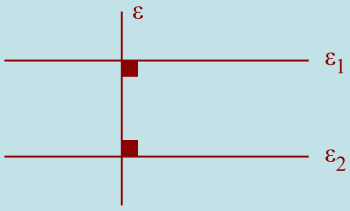
◆ Δύο ευθείες ενός επιπέδου
- ταυτίζονται όταν έχουν 2 κοινά σημεία.
- τέμνονται όταν έχουν 1 κοινό σημείο.
- είναι **παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινό σημείο.

◆ Από σημείο Α εκτός ευθείας ε
- **υπάρχει** ευθεία ε΄//ε.
- δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ε΄ είναι **μοναδική.** (Αίτημα παραλληλίας)



◆ Δυο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες αν :
- είναι **κάθετες** στην ίδια ευθεία ε.
- είναι **παράλληλες** προς τρίτη ευθεία ε.
- τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν:
  - τις εντός εναλλάξ γωνίες τους **ίσες**.
  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.
  - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **ίσες**.

◆ Έστω $ε_1//ε_2$ και ε μια τρίτη ευθεία..
- Αν $ε \perp ε_1$ τότε $ε \perp ε_2$.
- Αν η ε τέμνει την $ε_1$ τότε θα τέμνει και την $ε_2$ και θα σχηματίζει:
  - τις εντός εναλλάξ γωνίες **ίσες**.
  - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **ίσες**.
  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.



◆ Δύο γωνίες που έχουν **παράλληλες** ή **κάθετες** πλευρές είναι:

- **ίσες**, αν είναι
  - και οι δύο οξείες.
  - και οι δύο αμβλείες.
- **παραπληρωματικές**, αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

◆ Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου και κέντρα τους

- Περίκεντρο (σημείο τομής μεσοκαθέτων)
- Έγκεντρο (σημείο τομής εσωτερικών διχοτόμων)
- Παράκεντρα (σημεία τομής δύο εξωτερικών και μιας εσωτερικής διχοτόμου)

◆ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών

- τριγώνου είναι **2 ορθές**, οπότε:
  - Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
  - Αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.
  - Οι οξείες γωνίες ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
  - Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
- κυρτού ν-γώνου είναι **2ν – 4 ορθές**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

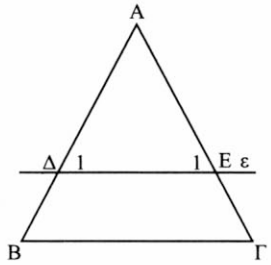
- Αν φέρουμε παράλληλη από σημείο της διχοτόμου γωνίας προς μια πλευρά της σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.
  (**Ασκήσεις:** §4.1-4.5 Εμπέδωσης 2, Αποδεικτικές 4, 5 και Σύνθετα 3)
  Αντίστοιχα αν φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο γωνίας.
  (**Ασκήσεις:** §4.1 – 4.5 Εμπέδωσης 3, Αποδεικτικές 2, 3 και Σύνθετα 4)
- Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:
  α) Είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.
  (**Ασκήσεις:** §4.1 – 4.5 Εμπέδωσης 6, Αποδεικτικές 1)
  β) Είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία. (**Ασκήσεις:** §4.1 – 4.5 Σύνθετα 1)
  γ) Τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν:
  i) Δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή
  ii) Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή
  iii) Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές
  (**Ασκήσεις:** §4.1 – 4.5 Εμπέδωσης 4, 5 και §4.6 – 4.8 Σύνθετα 7)
- Τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν
  i) Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι 0° ή 180°
  ii) Οι ευθείες π.χ. ΑΒ, ΑΓ είναι παράλληλες ή κάθετες σε ευθεία ε. Την (i) περίπτωση συναντήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο.(**Ασκήσεις:** §4.6 – 4.8 Σύνθετα 3). Άλλες ασκήσεις θα δούμε στο 5ο Κεφάλαιο.

Σχόλιο: *Ισοδύναμες εκφράσεις είναι: " η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το Γ", "το Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ".*

- Μια γωνία τριγώνου είναι ορθή αν οι άλλες δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. (**Ασκήσεις:** §4.6 – 4.8 Σύνθετα 1)

§ 4.1 - 4.5

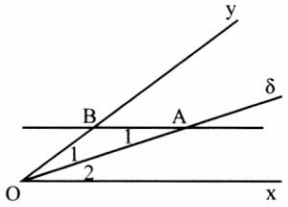
Ασκήσεις Εμπέδωσης



1. Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ)

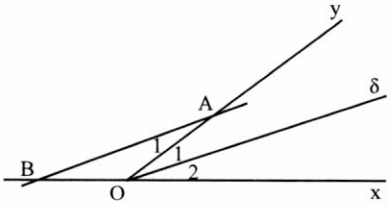
$\hat{B} = \hat{\Delta}_1, \Gamma = \hat{E}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, οπότε ΑΔ = ΑΕ



2. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος) $\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ (εντός εναλλάξ).

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$, οπότε ΟΒ = ΑΒ

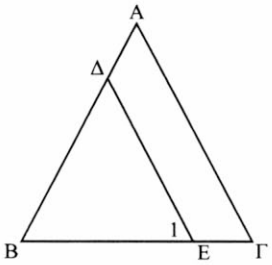


3. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος)

$\hat{O}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{O}_2 = \hat{B}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

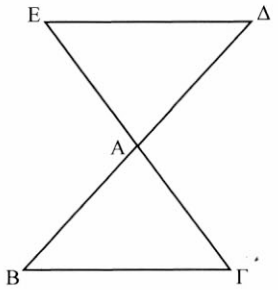
Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, οπότε ΟΑ = ΟΒ



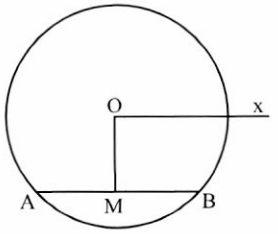
4. Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ)

ΔΒ = ΔΕ , οπότε $\hat{B} = \hat{E}_1$

Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε ΔΕ // ΑΓ (αφού σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες)

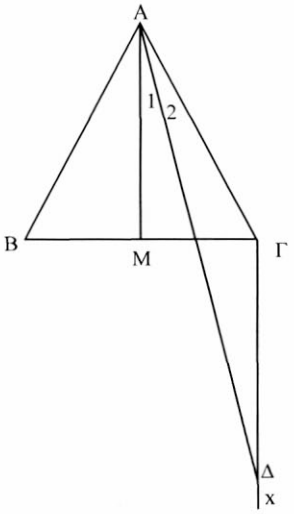


5. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A\Delta E}$ (Π-Γ-Π) άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}$ οπότε, $\Delta E // B\Gamma$ (αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες)



6. Έχουμε $OM \perp AB$ (OM απόστημα) $OM \perp Ox$.
Άρα $Ox // BA$

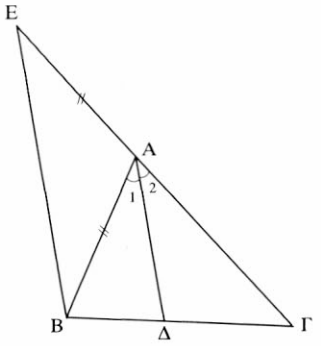
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έχουμε $AB = A\Gamma = \Gamma\Delta$ άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} AM \perp B\Gamma \text{ (διάμεσος και ύψος)} \\ \Gamma\Delta \perp B\Gamma \end{array}\right\}$ $AM // \Gamma\Delta$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.



2. Έχουμε

$E\Gamma = AE + A\Gamma$ (1)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (διχοτόμος)

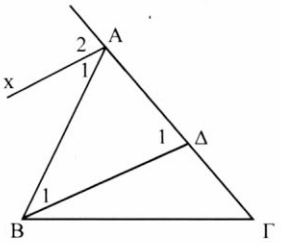
$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

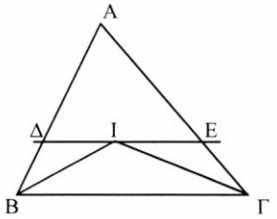
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}$, οπότε $AE = AB$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $E\Gamma = AB + A\Gamma$

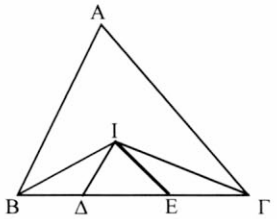
3. Έχουμε $\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta$ (1)
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (διχοτόμος)
$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ)
$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, οπότε $A\Delta = AB$ (2)
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$



4. Έχουμε $\Delta E = \Delta I + IE$ (1)
Τα τρίγωνα ΒΔΙ, ΓΕΙ είναι ισοσκελή (Ασκ. 2)
Οπότε $\Delta I = B\Delta$ και $IE = \Gamma E$ (2)
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$

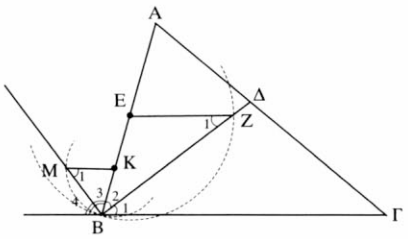


5. Έχουμε $B\Gamma = B\Delta + \Delta E + E\Gamma$ (1)
Τα τρίγωνα ΒΔΙ, ΓΕΙ είναι ισοσκελή, οπότε
$\Delta I = B\Delta$ και $IE = \Gamma E$ (2)
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $B\Gamma = I\Delta + \Delta E + IE$.

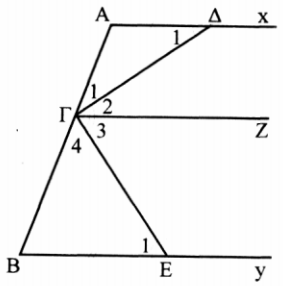


Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε $EB = EZ$, οπότε $\hat{B}_2 = \hat{Z}_1$. Αλλά $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$. Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$, οπότε $EZ // B\Gamma$ (1) (αφού σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες).
Όμοια $KB = KM$, οπότε $\hat{M}_1 = \hat{B}_3 = \hat{B}_4$.
Άρα $MK // B\Gamma$ (2).
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $EZ // MK$.



2. Φέρουμε ΓΖ // Ax // By . Τότε:

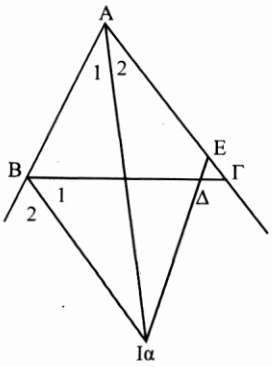


$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ (\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1)\end{array}\right\}$ Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (1)

Όμοια

$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma}_3 = \hat{E}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{\Gamma}_4 = \hat{E}_1 \text{ (BE = BΓ)}\end{array}\right\}$ Άρα $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΓΔ⊥ΓΕ
(διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).
Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}E = 1\perp$



3. Έχουμε ΔΕ = ΙαΕ − ΙαΔ (1)
Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = A\hat{I}\alpha E$, οπότε AE = ΙαΕ (2)
και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = B\hat{I}\alpha\Delta$, οπότε BΔ = ΙαΔ (3)
Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΑΕ − ΒΔ

4. α) Επειδή ΑΔ // ΕΜ έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$
οπότε $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$. Άρα AE = AZ

β) Έχουμε

$$BE + \Gamma Z = BA + AE + \Gamma Z \overset{(\alpha)}{=} BA + AZ + \Gamma Z = BA + A\Gamma = \text{σταθ.}$$

γ) Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά τμήμα ΜΗ = ΕΜ.

Τότε $\overset{\Delta}{BEM} = \overset{\Delta}{MH\Gamma}$ (BM = MΓ, MH = EM, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$)

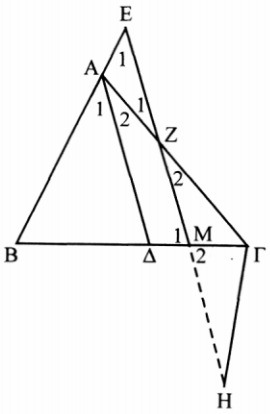
οπότε ΓΗ = BE (1) και $\hat{E}_1 = \hat{H}$. Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$

άρα $\hat{H} = \hat{Z}_2$, δηλαδή ΓΖ = ΓΗ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι BE = ΓΖ

Από το (β) είναι φανερό ότι $BE = \Gamma Z = \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$.

Επίσης $AE = AZ = BE - AB = \dfrac{AB + A\Gamma}{2} - AB = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$



§ 4.6 - 4.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **α)** $\hat{A} = 90°, \hat{B} = \frac{2}{3}\hat{A} = 60°, \hat{\Gamma} = 30°$

β) $\left.\begin{array}{l} \hat{A} = 90°, \hat{B} = \frac{2}{3}\hat{\Gamma} \\ \text{Αλλά } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90° \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \hat{B} = 36° \\ \hat{\Gamma} = 54° \end{array}$

2. Έχουμε $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

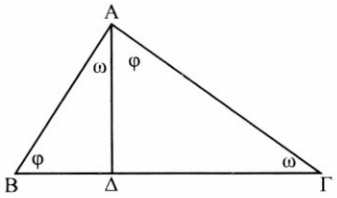
Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow 5\hat{A} = 180° \Leftrightarrow \hat{A} = 36°$, οπότε $B\hat{I}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2} = 108°$

3. Έχουμε $\hat{\Gamma}_{εξ} = 144° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 36°, \hat{A} = 3\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_{εξ} = 4\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 36°$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36°$, οπότε $AB = A\Gamma$

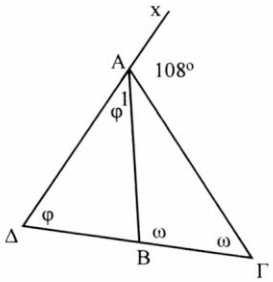
4. $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}$

$\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B = \hat{\omega}$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές)



5. Έχουμε $AB = \Delta B$, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{A}_1 = \hat{\varphi}$

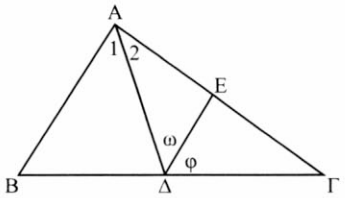
$\left.\begin{array}{l} AB = A\Gamma \text{ οπότε } B\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\omega} \\ \text{Στο τρίγωνο } A\Delta\Gamma\text{: } \hat{A}_{εξ} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 108° \\ \text{Στο τρίγωνο } A\Delta B\text{: } \hat{B}_{εξ} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 2\hat{\varphi} \end{array}\right\}$ οπότε $\hat{\varphi} = 36°$



6. Έχουμε $\hat{\omega} = \hat{A}_1 = 45°$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{\varphi} = \hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\Gamma} + 20° \\ \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90° \end{array}\right\} \hat{B} = \hat{\varphi} = 55°$



7. Έχουμε $\Sigma_\nu = 2\nu - 4$ ορθές, οπότε

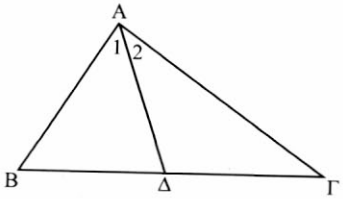
$$900° = (2\nu - 4)90° \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 10 \Leftrightarrow 2\nu = 14 \Leftrightarrow \nu = 7$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{εξ} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{B}_{εξ} = 180° + \hat{A} \Leftrightarrow 2(\hat{A} + \hat{B}) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) + \hat{A} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$

άρα $AB = A\Gamma$

2. i) $\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{A}_1 \\ A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}\right\} A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

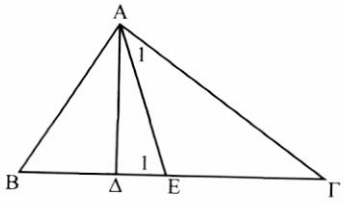


ii) Έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (από (i))

Αλλά $A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}B = 180°$

Άρα $2A\hat{\Delta}\Gamma = 180° + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = 90° - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

3. Στο τρίγωνο ΑΔΕ $(\hat{\Delta} = 90°)$: $\Delta\hat{A}E + E_1 = 90°$

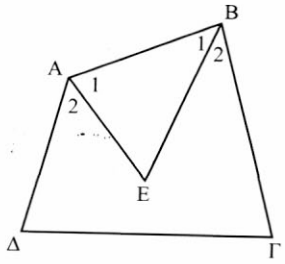


Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}_1}{2} + \hat{\Gamma}$ (εξωτερική) και

$90° = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ οπότε

$$\Delta\hat{A}E + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

4. Στο τρίγωνο ΑΕΒ:



$A\hat{E}B = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow A\hat{E}B + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 180°$ (1)

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360° \Leftrightarrow$

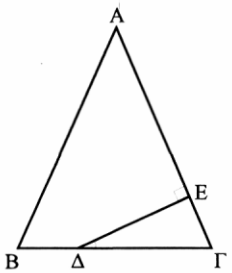
$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180°$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\hat{E}B = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

5. Έχουμε $\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}$ $\hat{A}+2\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=180^\circ-2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow$

$\hat{A}=2(90^\circ-\hat{\Gamma}) \Leftrightarrow \hat{A}=2E\hat{\Delta}\Gamma$ αφού $E\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^\circ$ οπότε

$E\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ-\hat{\Gamma}$.

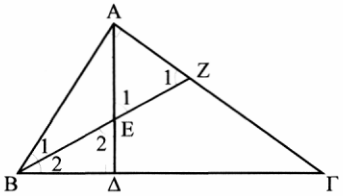


6. Στο τρίγωνο ΑΒΖ: $\hat{Z}_1+\hat{B}_1=90^\circ$

Στο τρίγωνο ΒΕΔ: $\hat{E}_2+\hat{B}_2=90^\circ$ $\Big\}$ $\hat{Z}_1=\hat{E}_1$ οπότε

Αλλά $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ και $\hat{E}_1=\hat{E}_2$

ΑΕ=ΑΖ

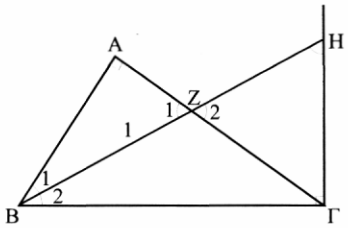


7. Στο τρίγωνο ΒΗΓ: $\hat{H}+\hat{B}_2=90^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΒΖ: $\hat{Z}_2+\hat{B}_1=90^\circ$ $\Big\}$ $\hat{Z}_1=\hat{H}$

Αλλά $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ και $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2$

οπότε ΖΓ = ΓΗ.



Σύνθετα Θέματα

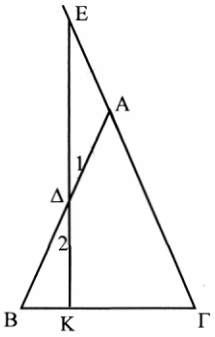
1. Στο τρίγωνο ΑΕΔ: ΑΕ = ΑΔ $\Leftrightarrow$ $\hat{\Delta}_1=\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{\Delta}_1+\hat{E}$

(ως εξωτερική), οπότε $\hat{\Delta}_1=\hat{E}=\dfrac{\hat{A}}{2}$ (1)

Αλλά $\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}$ $\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow$

$\dfrac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_1+\hat{B}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2+\hat{B}=90^\circ$ άρα $\hat{K}=90^\circ$,

οπότε ΔΕ⊥ΒΓ.

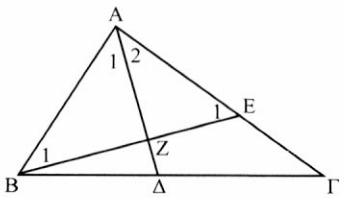


2. Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΖ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (1). Επίσης $\hat{B}_1 = E\hat{B}\Gamma = \hat{B}$ (2).

$\hat{E}_1 = E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (εξωτερική) $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$ (3).

Από (2), (3) προκύπτει ότι

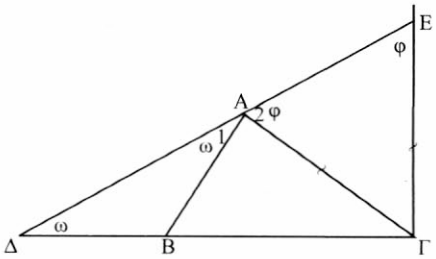
$$2E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} + \hat{B} \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$



3. Έχουμε: ΑΒ = ΒΔ οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta} = \hat{\omega}$ και ΓΕ = ΑΓ οπότε $\hat{A}_2 = \hat{E} = \hat{\varphi}$.

Αλλά $\hat{E} + \hat{\Delta} = 90°$ (από το τρίγωνο ΕΓΔ) οπότε $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$.

Άρα $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A} = 180°$ και επομένως τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

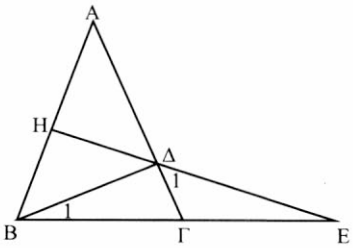


4. i) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 90° \text{ (από τρίγωνο } B\Delta\Gamma) \\ \hat{E} + \hat{B} = 90° \text{ (από τρίγωνο } BHE) \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \quad (AB = A\Gamma) \end{array}\right\} \hat{B}_1 = \hat{E}$$

οπότε ΒΔ = ΔΕ

ii) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΔΓΕ έχουν: ΔΓ κοινή, ΒΔ = ΔΕ και $B\hat{\Delta}\Gamma = 90° > \hat{\Delta}_1$. Άρα ΒΓ > ΓΕ.



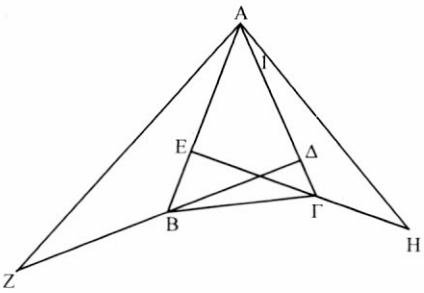
5. i) Έχουμε $\overset{\Delta}{AZB} = \overset{\Delta}{A\Gamma H}$ (ΒΗ = ΑΓ, ΓΗ = ΑΒ, $A\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}H = 90° + \hat{A}$).

Άρα ΑΖ = ΑΗ.

ii)

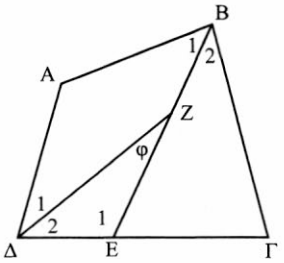
$$\left.\begin{array}{l} Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}H \\ \Gamma\hat{A}H = \hat{Z} \text{ (από (i))} \end{array}\right\} Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \hat{Z} = 90°$$

οπότε ΑΖ⊥ΑΗ



6. Στο τρίγωνο ΔΖΕ είναι:

$$\hat{\varphi} + \hat{\Delta}_2 + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\varphi} + \frac{\hat{\Delta}}{2} + \hat{E}_1 = 180^\circ \quad (1)$$

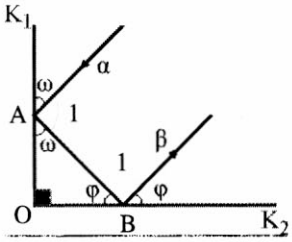


Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}$ (2) (εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΓ) και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$, οπότε

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \quad (3).$$

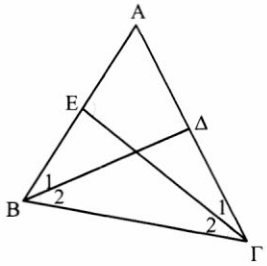
Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\varphi} = \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}$.

7. Επειδή $A\hat{O}B = 90^\circ$, θα είναι $\omega+\varphi = 90^\circ$ (1).
Επομένως
$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - 2\omega + 180^\circ - 2\varphi =$
$= 360^\circ - 2(\omega + \varphi) \overset{(1)}{=} 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.
Άρα α//β.



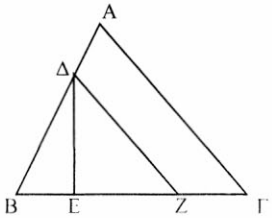
Γενικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma = \hat{A} + \hat{B}_1 = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}$ (εξωτερική του τριγώνου ΑΒΔ) και $\Gamma\hat{E}A = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΓ).



Αρκεί $\hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ που ισχύει (αφού $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} + \hat{\Gamma} - 120^\circ$).

2. Έστω Ζ μέσο του ΕΓ. Τότε το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισόπλευρο ($B\Delta = BZ = \frac{2}{3}\alpha$, $\hat{B} = 60^\circ$) και η ΔΕ είναι διάμεσος.
Άρα ΔΕ ύψος οπότε ΔΕ⊥ΒΓ.

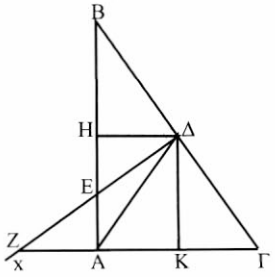


3. Φέρουμε ΔΗ⊥ΑΒ, ΔΚ⊥ΑΓ. Είναι ΔΗ = ΔΗ (ΑΣ διχοτόμος).

Επίσης είναι $\overset{\Delta}{BH\Delta} = \overset{\Delta}{Z\Delta K}$ ($\hat{H} = \hat{K} = 90°$, ΔΗ = ΗΚ, $\hat{B} = \hat{Z}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).

Άρα ΒΔ = ΖΔ.

Επομένως $\overset{\Delta}{BE\Delta} = \overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$ (ορθογώνια, ΒΔ = ΖΔ, $\hat{B} = \hat{Z}$), άρα ΒΕ = ΓΖ.



4. Επειδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$, και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90°$ είναι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180°$. Άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$.

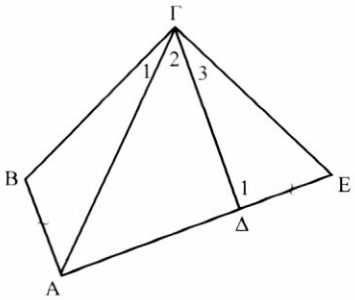
Επομένως $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$

(ΒΓ = ΓΔ, ΑΒ = ΔΕ, $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$.).

Οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_3$ (1).

Αλλά $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90° \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 90° \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}E = 90°$ δηλαδή ΑΓ⊥ΓΕ.



5. i) Επειδή ΑΒ < ΑΓ θα είναι $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ (1).

Αλλά $\hat{B} = 90° - B\hat{A}\Delta$, $\hat{\Gamma} = 90° - \Gamma\hat{A}\Delta$ (2).

Από (1), (2 προκύπτει ότι: $90° - B\hat{A}\Delta > 90° - \Gamma\hat{A}\Delta$

ή $-B\hat{A}\Delta > -\Gamma\hat{A}\Delta$ ή $B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$.

ii) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ΜΕ = ΑΜ.

Τότε $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ME\Gamma}$ (ΑΜ = ΜΕ, ΒΜ = ΜΓ, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$).

Άρα ΑΒ = ΓΕ και $B\hat{A}M = \hat{E}$.

Επομένως στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε ΓΕ = ΑΒ < ΑΓ, οπότε

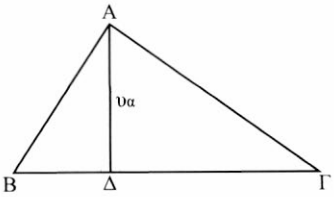
$M\hat{A}\Gamma < \hat{E}$ ή $M\hat{A}\Gamma < B\hat{A}M$.

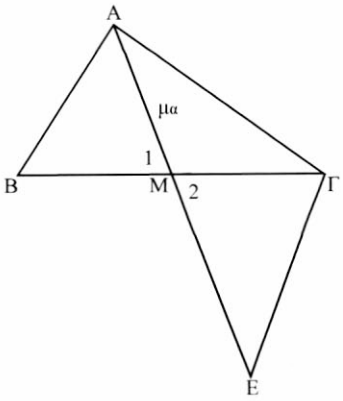
iii) Επειδή ΑΕ διχοτόμος θα είναι

$$B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Από το i) έχουμε

$B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$, άρα $B\hat{A}\Delta < \frac{\hat{A}}{2}$,

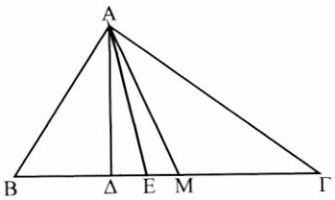




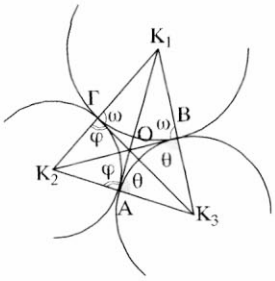
ενώ από το ii) έχουμε

$B\hat{A}M > M\hat{A}\Gamma$ άρα $B\hat{A}M > \frac{\hat{A}}{2}$.

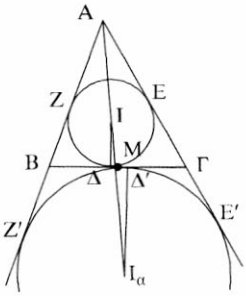
Επομένως το ύψος και η διάμεσος βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου.



6. Αφού τα τρίγωνα $K_1B\Gamma$, $K_2A\Gamma$, K_3AB είναι ισοσκελή, οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $K_1K_2K_3$ είναι μεσοκάθετες των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Άρα το έγκεντρό του τριγώνου $K_1K_2K_3$ ταυτίζεται με το περίκεντρο Ο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε
ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $OA \perp K_2K_3$, $OB \perp K_1K_3$, $O\Gamma \perp K_1K_2$. Πράγματι έχουμε $O\hat{B}K_1 = O\hat{\Gamma}K_1 = \hat{\omega}$, $O\hat{\Gamma}K_2 = O\hat{A}K_2 = \hat{\varphi}$ και $O\hat{A}K_3 = O\hat{B}K_3 = \hat{\theta}$ (από την ισότητα των αντίστοιχων τριγώνων). Επειδή $\omega + \varphi = \omega + \theta = \varphi + \theta = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \hat{\theta} = 90°$.



7. i) Έχουμε AZ = AE = x, BΔ = BZ = y και ΓΔ = ΓΕ = ω.
Τότε $y + \omega = \alpha$, $x + \omega = \beta$, $x + y = \gamma$ (1).
Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:
$2x + 2y + 2\omega = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Leftrightarrow x + y + \omega = \tau$ (2)
Από (1), (2) προκύπτει ότι $x = \tau - \alpha$, $y = \tau - \beta$ και $\omega = \tau - \gamma$.



ii) $AZ' + AE' = AB + BZ' + A\Gamma + \Gamma E' =$
$AB + B\Delta' + A\Gamma + \Gamma\Delta' = AB + A\Gamma + B\Gamma = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.
Επειδή όμως $AZ' = AE'$, προκύπτει ότι $AZ' = AE' = \tau$.
iii) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Τότε ΜΒ = ΜΓ (3).
Αλλά $B\Delta = \tau - \beta$ και
$\Gamma\Delta' = \Gamma E' = AE' - A\Gamma = \tau - \beta$. Άρα $B\Delta = \Gamma\Delta'$ (4)
Από (3), (4) προκύπτει ότι $M\Delta = M\Delta'$, άρα τα τμήματα ΒΓ και ΔΔ′ έχουν κοινό μέσο.
iv) $ZZ' = AZ' - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$, $EE' = AE' - AE = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$ και
$\Delta\Delta' = B\Gamma - B\Delta - \Gamma\Delta' = \alpha - (\tau - \beta) - \Gamma E' = \alpha - \tau + \beta - (AE' - A\Gamma) =$
$= \alpha - \tau + \beta - (\tau - \beta) = \alpha + 2\beta - 2\tau = \alpha + 2\beta - (\alpha + \beta + \gamma) = \beta - \gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, θα τα ταξινομήσουμε και θα εξετάσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ως εφαρμογές θα αποδειχθούν κάποιες βασικές προτάσεις για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και τις παράλληλες ευθείες.

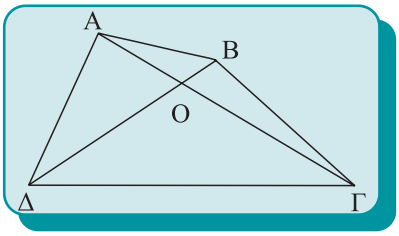
Josef Alberts (Γερμανός, 1888-1976).
«Αφιέρωμα στο τετράγωνο: οπτασία», λάδι σε σανίδα, 1959.
Συλλογή Μουσείου Solomon R. Guggenheim, Νέα Υόρκη.

5.1 Εισαγωγή

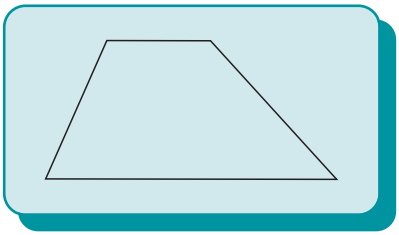
Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.

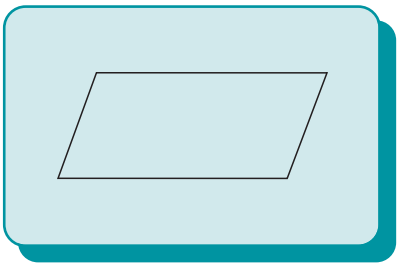
Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται ***τραπέζιο*** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται ***παραλληλόγραμμο*** (σχ.3).



Σχήμα 1


Σχήμα 2


Σχήμα 3

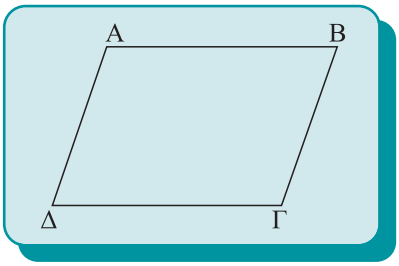
5.2 Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.



Σχήμα 4

• **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
(iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

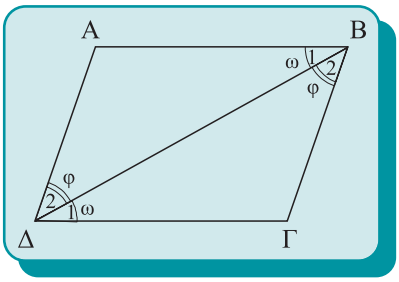
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 5). Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

ΒΔ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

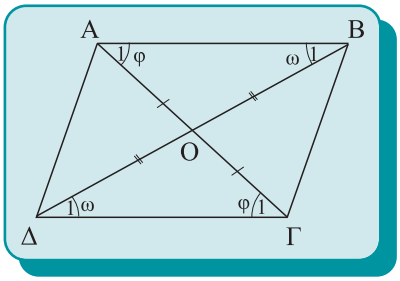
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 5

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:



Σχήμα 6

ΑΒ = ΓΔ

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

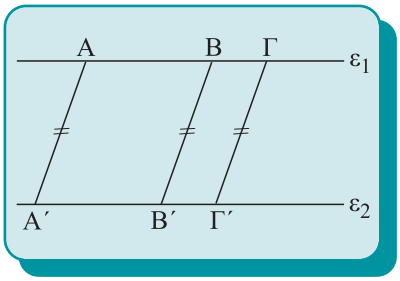
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ =ΟΔ.

Πορισμα I

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται ***κέντρο*** του παραλληλογράμμου.

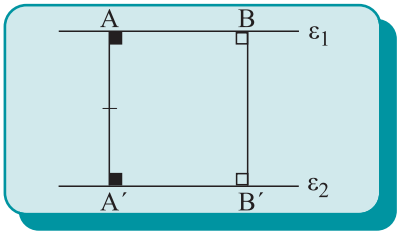


Σχήμα 7

Πορισμα II

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται ***απόσταση*** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ***ύψος*** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται ***βάσεις*** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).

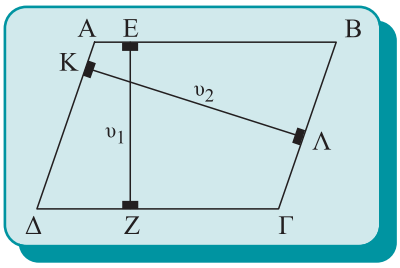


Σχήμα 8

- **Κριτήρια για παραλληλόγραμμα**

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
(ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
(iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
(iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

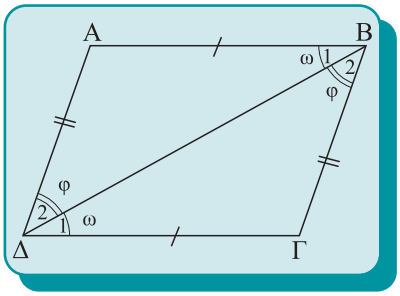


Σχήμα 9

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

(i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

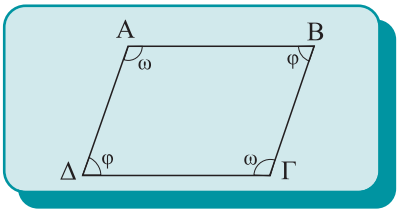


Σχήμα 10

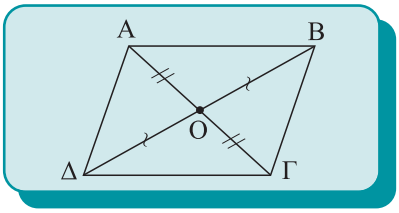
(ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

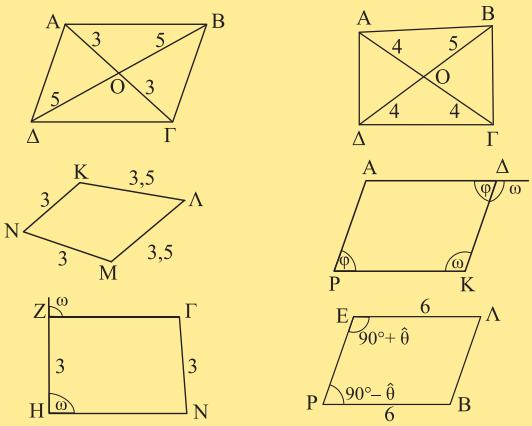


Σχήμα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

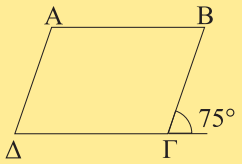
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*

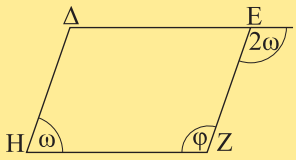


2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;*

3. *Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.*



4. *Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.*



5. *Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:*

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.*

2. *Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, ώστε ΟΕ = ΟΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ//ΑΒ (Ε σημείο*

του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.*

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΗ = ΑΖ,
ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

5. *Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.*

Σύνθετα θέματα

6. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι*
i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. *Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι* $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.*

5. *Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;*

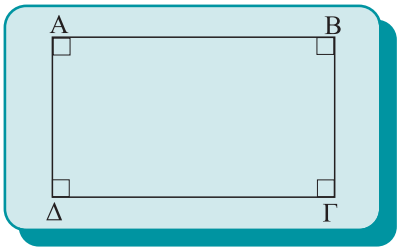
Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το ***ορθογώνιο***, το ***ρόμβο*** και το ***τετράγωνο***.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές**.

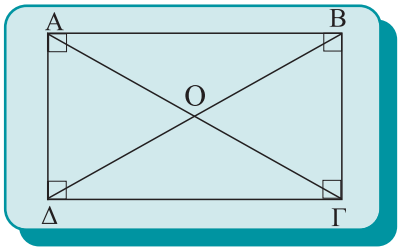
- **Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 14

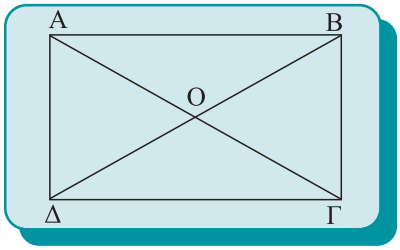
• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
(iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές.**
(iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες.**

Απόδειξη

(i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\angle$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\angle$.
(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.



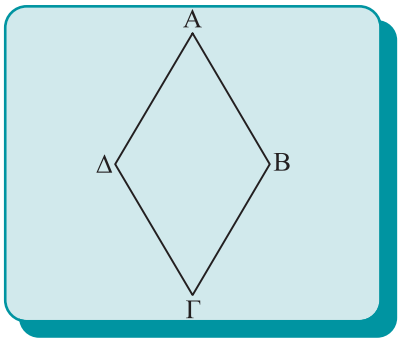
Σχήμα 15

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες**.



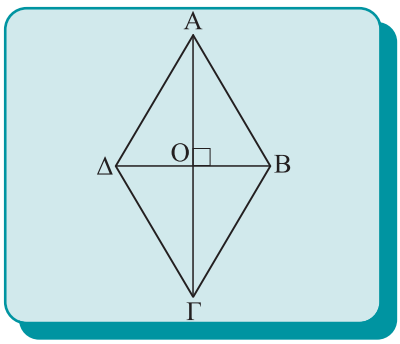
Σχήμα 16

• Ιδιότητες του ρόμβου

(i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως ΑΓ⊥ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

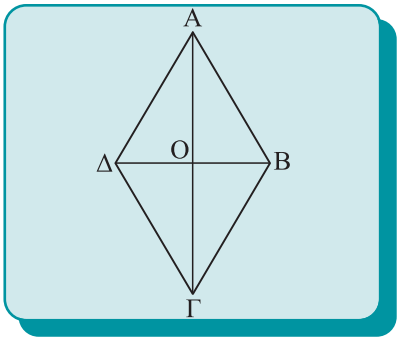


Σχήμα 17

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
(iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
(iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.



Σχήμα 18

Απόδειξη

(i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
(iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ⊥ΒΔ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
(iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο

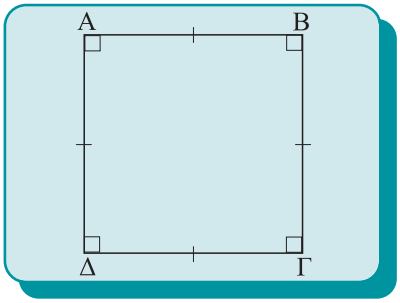
Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

• Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

(i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
(ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
(iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα, διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.



Σχήμα 19

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

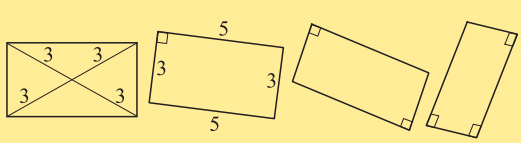
(i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

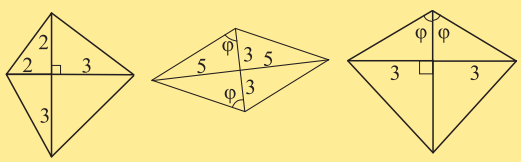
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι*
i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;

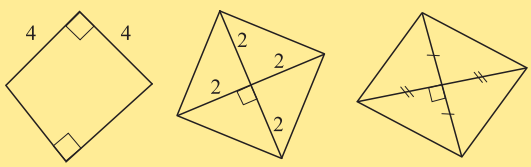
i)



ii)



iii)



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα* ***τετράπλευρο*** *είναι:*
i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

3. *Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;*
i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. *Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:*
i) Τετράγωνο – Ρόμβος ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. *Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:*

i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐

ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐

iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐

iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ⊥ΔΓ και ΓΖ⊥ΑΒ.Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*

6. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΖ = ΔΕ, *ii) ΑΖ⊥ΔΕ.*

3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*

4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 45°$. Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.*

2. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε ΒΕ⊥ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΖ.*

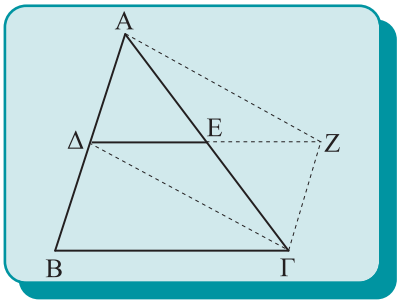
3. *Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).*

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $\Delta E \,//\, = \frac{B\Gamma}{2}$.

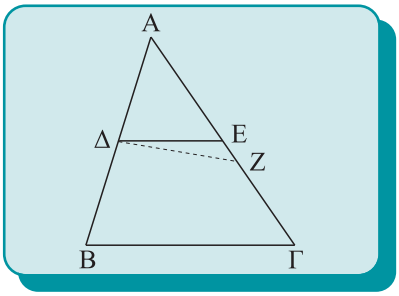
Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:
(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και
(ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Θεώρημα ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



Σχήμα 21

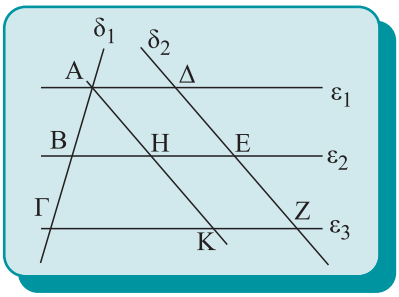
Θεώρημα ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.



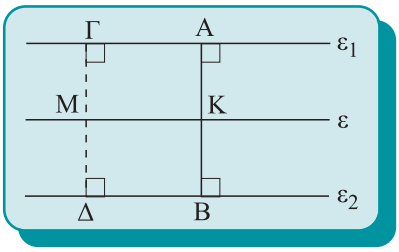
Σχήμα 22

• Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις ε_1 και ε_2. Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις ε_1 και ε_2 , αφού $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2, το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει $ΜΓ+ΜΔ = ΓΔ = υ$, οπότε $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα (ΜΓ// = ΑΚ, ΜΔ // = ΚΒ), οπότε ΜΚ // ε_1, ε_2. Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε.



Σχήμα 23

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.
Η ευθεία ε λέγεται ***μεσοπαράλληλος*** των ε_1 και ε_2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

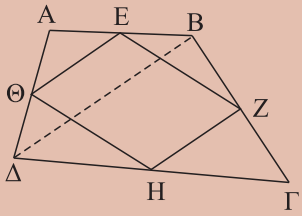
Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

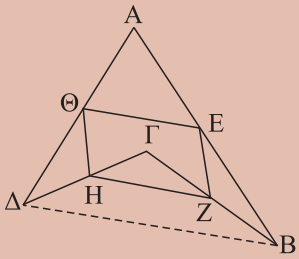
Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 24α



Σχήμα 24β

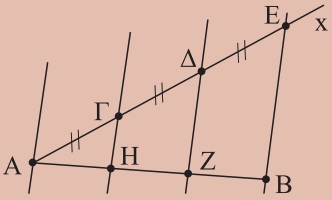
ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).

Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία Αx και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρουμε τη ΒΕ και από τα Δ, Γ και Α παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 105, θα είναι ΑΗ = ΗΖ = ΖΒ.



Σχήμα 25

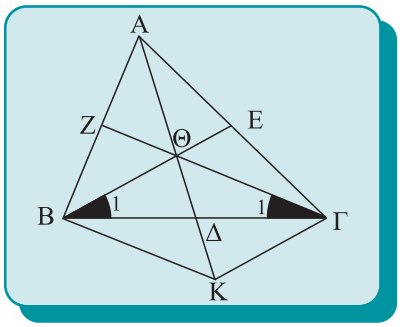
5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\angle$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ$.



Σχήμα 26

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $ΖΘ = // \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$ΘΔ = ΔΚ = \frac{ΘΚ}{2}, \text{ άρα } ΘΔ = \frac{ΑΘ}{2} \text{ ή } ΑΘ = 2ΘΔ.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$ΕΘ = \frac{ΓΚ}{2} = \frac{ΒΘ}{2} \text{ ή } ΒΘ = 2ΘΕ.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$ΘΔ = \frac{1}{3}ΑΔ, \text{ οπότε } ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ.$$

Όμοια προκύπτει ότι $ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ$ και $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.*

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

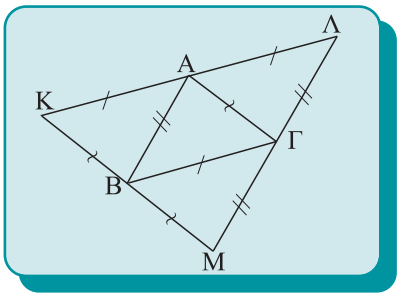
Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27).

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.



Σχήμα 27

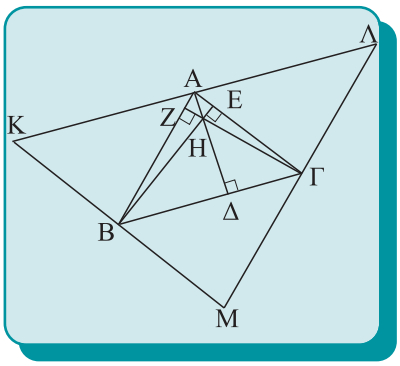
Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η.

Το σημείο Η λέγεται ***ορθόκεντρο*** του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 28

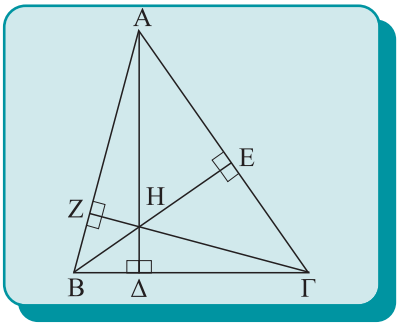
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β,Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.
Τα ύψη ΗΔ,ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.



Σχήμα 29

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

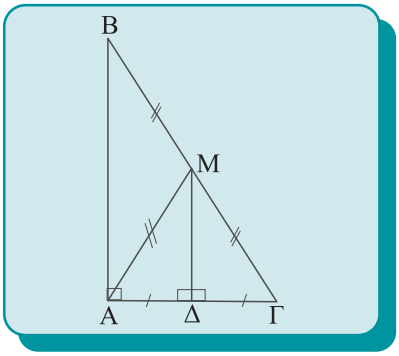
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά ΑΒ⊥ΑΓ, επομένως και ΜΔ⊥ΑΓ. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 30

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Θεώρημα ΙΙ

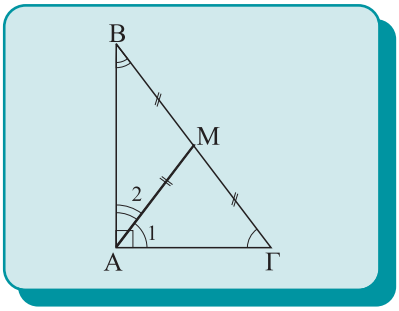
Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

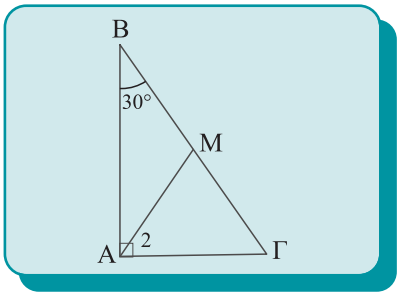
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

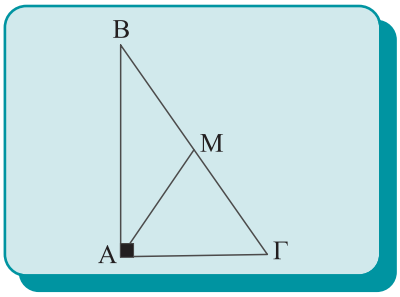
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε $2\hat{A} = 2L$ ή $\hat{A} = 1L$.



Σχήμα 31



Σχήμα 32



Σχήμα 33

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ (σχ.32). Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{Γ} = 90° - 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$. Έτσι $\hat{A}_2 = Γ = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.

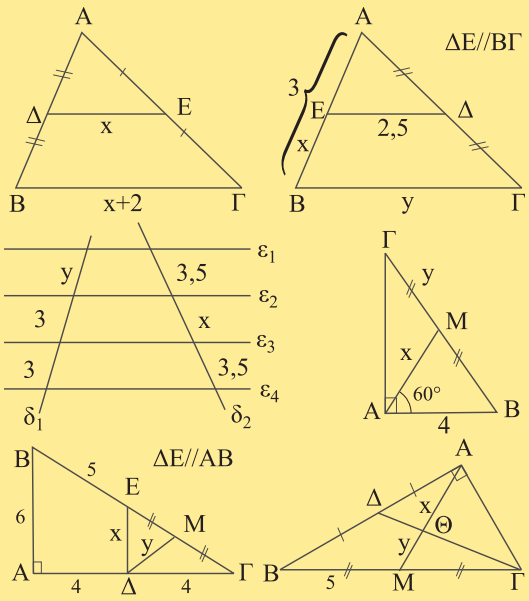
Απόδειξη

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$ (αφού $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{Γ} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

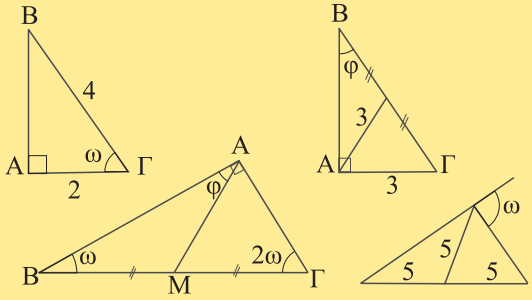
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.*

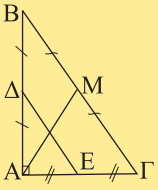


2. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.*



3. *Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;*

4. *Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα ΑΜ = ΔΕ.*



5. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α;*

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.*

5. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.*

6. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ⊥ΔΒ.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ.*
i) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.
ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.*

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

4. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.*

5. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.*

6. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.*

7. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι*

i) ΒΖ = ΖΓ, *ii) $\Gamma H = \frac{AH}{2}$.*

8. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:*

i) ΜΔ = ΑΔ, *ii) $M\Delta = \frac{AB}{3}$.*

9. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η, Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΗ⊥ΚΖ.*

10. *Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;*

Σύνθετα θέματα

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

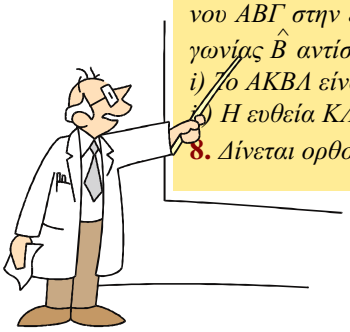
2. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15°$, τότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα. (**Υπόδειξη**: Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ).*

3. *Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90°$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:*
i) ΕΜ//ΑΓ ,
ii) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$,
iii) $\Delta\hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}$.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ το μέσο του τμήματος ΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.*



7. *Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.
ii) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

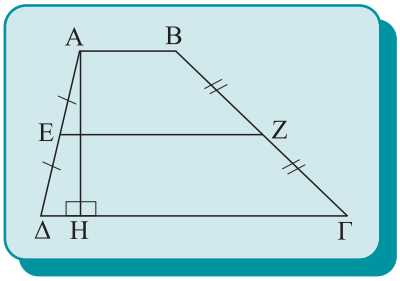
8. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΔ = ΕΖ,
ii) ΑΜ⊥ΕΖ,
iii) Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται ***βάσεις*** του τραπεζίου.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου.

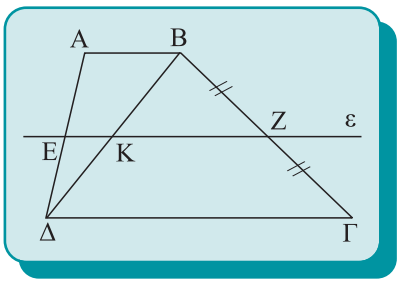
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

Απόδειξη



Σχήμα 35

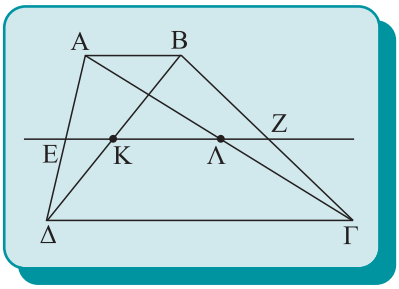
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:
Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).
Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2).
Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και
i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$ΕΚ + ΚΖ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΓΔ}{2} \quad ή \quad ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}.$$

Πορισμα

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



Σχήμα 36

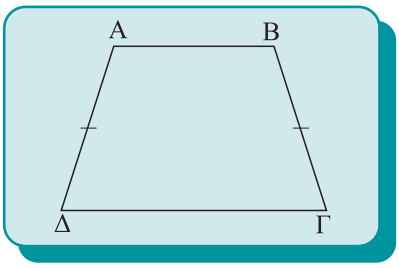
Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $ΕΛ = \frac{ΓΔ}{2}$ (3).

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$ΕΛ – ΕΚ = \frac{ΓΔ}{2} – \frac{ΑΒ}{2} \quad ή \quad ΚΛ = \frac{ΓΔ – ΑΒ}{2} \text{ (με } ΓΔ > ΑΒ).$$

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο



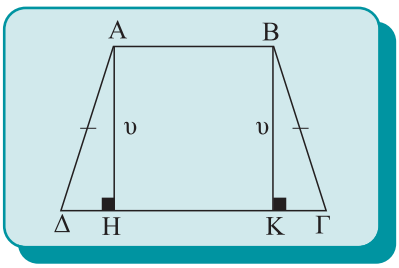
Σχήμα 37

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

- **Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου**

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

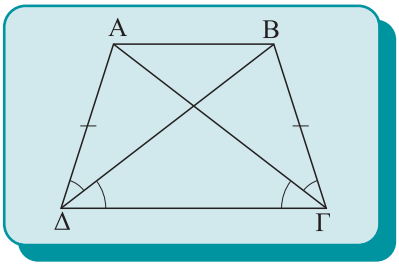


Σχήμα 38

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{Η} = \hat{Κ} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{Γ} = \hat{Δ}$. Επειδή $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{Α} = \hat{Β}$.

(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 39

• Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάνω προτάσεις.

(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

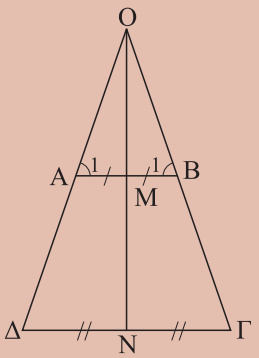
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:
(i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
(ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).

(ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης ΑΒ διέρχεται από το Ο, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη ΓΔ επειδή ΓΔ//ΑΒ. Αφού η ε διέρχεται από το Ο, είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΓΔ, άρα μεσοκάθετος και στη ΓΔ.

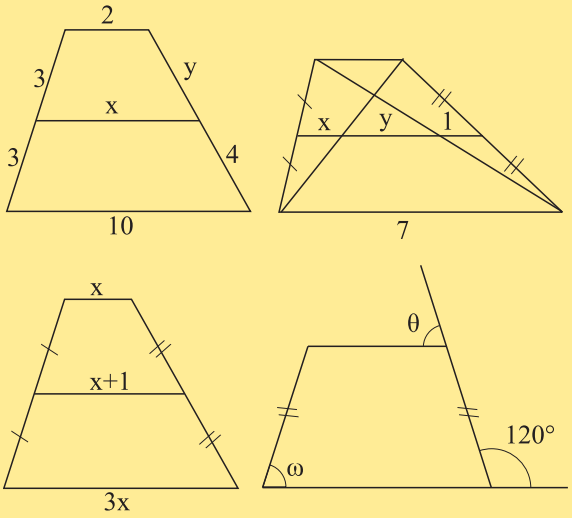


Σχήμα 40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

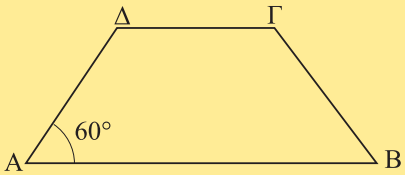
1. *Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x, y, ω και θ.*



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι ισοσκελές τραπέζιο;*

3. *Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου; Ποιες ιδιότητες έχει;*

4. *Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ = 5x, ΔΓ = 3x και $\hat{A}$ = 60°. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:*



i) 10x *ii) 11x* *iii) 12x*
iv)13x *v)14x*
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του*

ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.

2. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

3. *Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ,ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

5. *Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*

$$\Delta E = \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}.$$

6. *Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ′ και ΓΓ′ οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β′Γ′ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι* $MK = \frac{A\Delta}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι* $B\hat{H}\Gamma = 90°$.

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.*

3. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ *και* $\hat{B} = 120°$. *Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.*

4. *Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Delta = 90°$.

5. *Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι ΒΜ⊥ΔΓ.*

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

7. *Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.*

8. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;*

9. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με* $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$. *Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ.*

10. *Αν Α′, Β′, Γ′, Δ′, Κ′ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι*
ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ + ΔΔ′ = 4ΚΚ′.

Σύνθετα θέματα

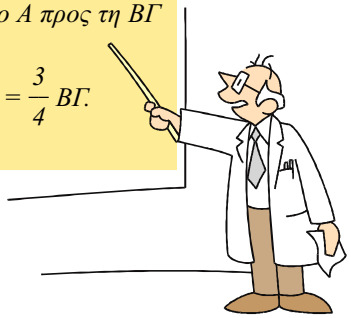
1. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{A}$ *και* $\hat{\Delta}$ *τέμνονται στη ΒΓ.*

2. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ *και ΒΓ = 2ΓΔ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Gamma = 3M\hat{A}B$.

3. *Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α΄, Β΄ και Γ΄ οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι*
ΑΑ′ – ΓΓ′ = ΒΒ′ (με ΑΑ′ > ΓΓ′).

4. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ (*$\hat{A} = 90°$*) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η.*
Αν $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$ *,να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{B}$.

5. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι*
i) αν ΔΜ = ΔΓ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε ΑΜ = ΒΕ,
ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε $AE = \frac{3}{4}B\Gamma$.



5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

ΣΧΟΛΙΟ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κάποια από τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (βαρύκεντρο, ορθόκεντρο κτλ.) καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας (§ 4.2).

Είδαμε προηγούμενα (§4.5 και §5.7 - §5.8) ότι σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών.

Ανακεφαλαιώνοντας, σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ αποδείξαμε ότι **διέρχονται από το ίδιο σημείο:**

• Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο Ο λέγεται **περίκεντρο** του ΑΒΓ και ο κύκλος (Ο,ΟΑ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

• Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο Ι λέγεται **έγκεντρο** του ΑΒΓ και ο κύκλος με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

• Οι τρεις διάμεσοί του. Το κοινό σημείο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** του ΑΒΓ.

• Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο τους Η λέγεται **ορθόκεντρο** του ΑΒΓ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\beta \neq \gamma$) με $\hat{A} = 60°$, τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΕ = ΝΔ.*

2. *Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και σημείο Α της ε_1. Φέρουμε $AK \perp \varepsilon_2$. Αν Β σημείο της ε_2 και μια ευθεία, που διέρχεται από το Β, τέμνει τις ΑΚ και ε_1 στα Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = 2ΑΒ, να αποδείξετε ότι $A\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Δ το μέσο της ΑΒ και σημείο Ε της ημιευθείας ΔΒ, ώστε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$. Από τα Β και Ε φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, οι οποίες τέμνουν την ΑΓ στα Β' και Ε' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) $B'E' = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

ii) Η ευθεία ΕΕ' διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ, $\hat{B} > 60°$ και το ύψος του ΑΕ προς τη ΒΓ ($AE \perp B\Gamma$). Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος,

ii) η ΖΕ είναι διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$,

iii) το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv) $\Delta\hat{Z}E = 3Z\hat{E}\Gamma$.

5. *Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α', Β', Γ', Κ' οι προβολές των Α,Β,Γ και του βαρυκέντρου Κ αντίστοιχα στην ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' = 3ΚΚ'.*

6. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$. Αν Ζ το μέσο του ΕΓ, να αποδείξετε ότι:*

i) ΔΖ//ΒΕ,

ii) $AH \perp BE$, όπου Η το μέσο του ΔΕ.

7. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ και Λ είναι τα κέντρα των ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.*

8. *Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και κέντρου Ο. Στη διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Μ, ώστε* $ΓΜ = \frac{ΑΓ}{4}$. *Φέρουμε τη ΒΜ που τέμνει τη ΓΔ στο Ε και ΟΗ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $ΟΖ = \frac{α}{3}$,

ii) το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9. *Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν Κ, Λ τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά,

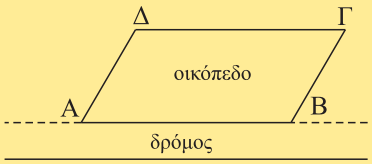
ii) $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$ *(με ΔΓ > ΑΒ).*

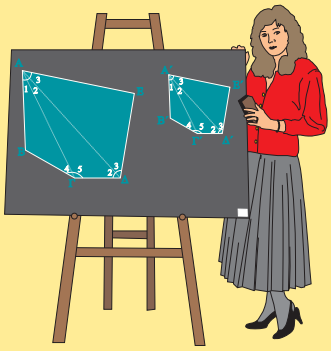
iii) αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

10. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ και το μέσο Μ του ΕΔ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από τη ΒΓ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις ΑΒ, ΑΓ.*

Δραστηριότητες

1. *Δύο αδέλφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά ΑΒ παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;*





2. *Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.*

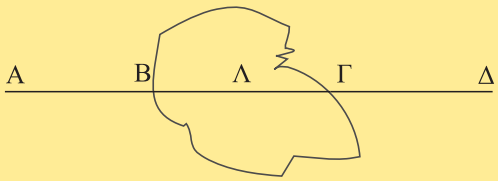
3. *Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.*

i) παραλληλόγραμμο
ii) ορθογώνιο
iii) ρόμβος
iv) τετράγωνο
v) τραπέζιο
vi) ισοσκελές τραπέζιο

4. *Θεωρούμε ευθεία ε και ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου Μ του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του Α και Β από την ευθεία ε (**Υπόδειξη**: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των Α και Β ως προς την ευθεία ε).*

Εργασία

*Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος Λ, τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή ΑΒΓΔ. Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση ΓΔ αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;*

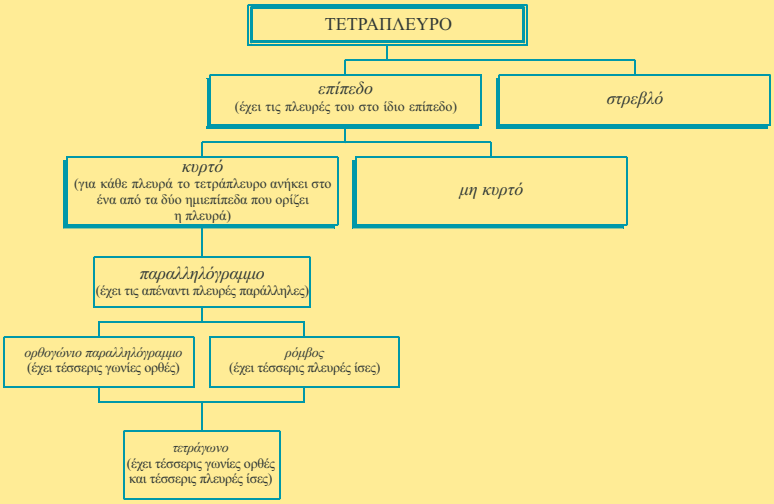


ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε *επίπεδα* και *στρεβλά*, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε *κυρτά* και *μη κυρτά*, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες.

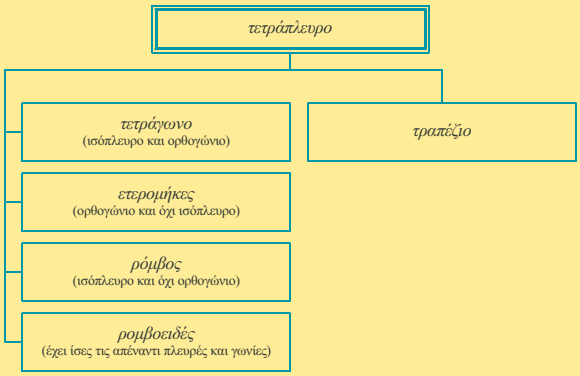
Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

(α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές,
(β) ο ρόμβος που έχει τέσσερις πλευρές ίσες,
(γ) το τετράγωνο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες.

Όμως η ταξινόμηση αυτή δε διαμορφώθηκε εξ αρχής στην ιστορία της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης π.χ. στα «Στοιχεία» του προτείνει μια άλλη ταξινόμηση (Διάγραμμα 2).



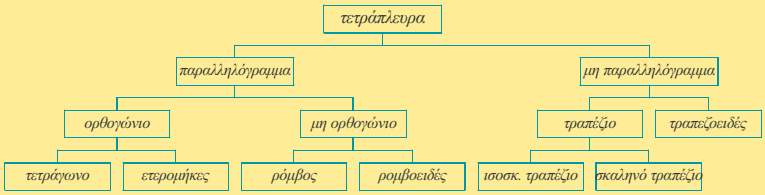
Διάγραμμα 2: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

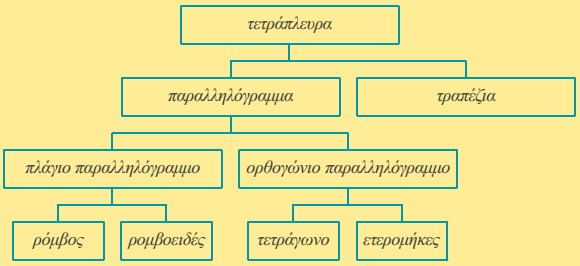
Η ταξινόμηση αυτή δε χρησιμοποιεί ως κριτήριο την έννοια της παραλληλίας, η οποία στα «Στοιχεία» εισάγεται αργότερα. Επίσης δε φαίνεται να στηρίζεται σε κάποια ενιαία αρχή. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τα κατηγορήματα «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους: ορθογώνιο και ισόπλευρο είναι το *τετράγωνο*, ορθογώνιο και όχι ισόπλευρο το *ετερομήκες* (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), ισόπλευρο και όχι ορθογώνιο ο *ρόμβος*. Όμως, η έννοια του *ρομβοειδούς* (δηλαδή του πλάγιου παραλληλογράμμου) στηρίζεται στην έννοια της ισότητας των απέναντι πλευρών και των γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. *Τραπέζιο* ονομάζει όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό, δηλαδή τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Ο όρος τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, απαντάται αργότερα στον Αρχιμήδη.

Η ταξινόμηση όμως αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δε χρησιμοποιεί ποτέ στα «Στοιχεία» του τις έννοιες του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς. Παρόλα αυτά, η ταξινόμηση αυτή απαντάται και σε μεταγενέστερους μαθηματικούς, ακόμα και του Αραβικού κόσμου, όπως π.χ. στη διαπραγμάτευση της Γεωμετρίας του αλ-Χουαρίζμι. Όμως υπήρχαν και μαθηματικοί που προσπάθησαν να τροποποιήσουν την ταξινόμηση του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ποσειδώνιο μια πιο ολοκληρωμένη ταξινόμηση, η οποία απαντάται επίσης στον Ήρωνα (Διάγραμμα 3).

Μια άλλη προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται το 16ο αι. στη «Γεωμετρία» (1569) του Πέτρου Ράμου (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée) (Διάγραμμα 4). Η ταξινόμηση του Ράμου φαίνεται να στηρίζεται στη διχοτομική διαίρεση του πλάτους των εννοιών.



Διάγραμμα 3: Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα



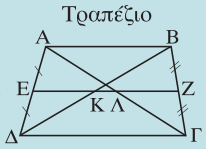
Διάγραμμα 4: Η ταξινόμηση του Ράμου

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Τραπέζιο

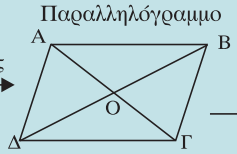
Έχει δύο παράλληλες πλευρές →



Ιδιότητες →
- ΕΖ//ΑΒ//ΓΔ
- $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$
- $ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$

Παραλληλόγραμμο

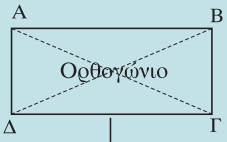
Απέναντι πλευρές παράλληλες →



Ιδιότητες →
- ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ
- ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ
- $\hat{A}=\hat{Γ}$ και $\hat{B}=\hat{Δ}$
- ΑΟ=ΟΓ και ΒΟ=ΟΔ

Κριτήρια →
- Καθεμιά από τις ιδιότητες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

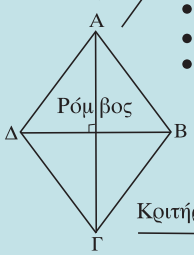
Ορθογώνιο



Κριτήρια
- Μια γωνία ορθή
- ΑΓ = ΒΔ

Επιπλέον ιδιότητες
- ΑΓ = ΒΔ
- $\hat{A}=\hat{B}=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^o$

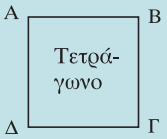
Ρόμβος



Επιπλέον ιδιότητες
- ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ
- ΑΓ ⊥ ΒΔ
- Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του

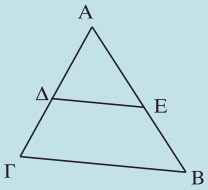
Κριτήρια →
- Δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες
- ΑΓ ⊥ ΒΔ
- Μια διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του

Τετράγωνο



Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

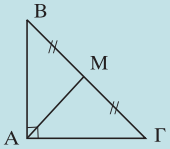
Τρίγωνο



Αν Δ,Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ, τότε $ΔΕ//=\frac{ΒΓ}{2}$.

Αν Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ τότε Ε μέσο ΑΓ

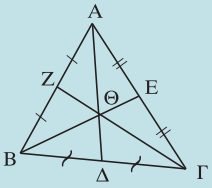
Ορθογώνιο Τρίγωνο



$\hat{A}=90^o \Leftrightarrow AM=\frac{ΒΓ}{2}$.

Αν $\hat{A}=90^o$, τότε: $\hat{B}=30 \Leftrightarrow ΑΓ=\frac{ΒΓ}{2}$.

Βαρύκεντρο τριγώνου



$ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ,\ ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ,\ ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$

Ορθόκεντρο τριγώνου → Σημείο τομής υψών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Το κοινό κέντρο δυο ή περισσότερων παραλληλογράμμων διχοτομεί τις διαγωνίους των παραλληλογράμμων. Άρα οι φορείς τους είναι συντρέχουσες ευθείες.
  (**Ασκήσεις:** §5.1 – 5.2 Εμπέδωσης 3 και Σύνθετα 1)

- Για τις συντρέχουσες ευθείες λαμβάνουμε υπόψιν μας την παρατήρηση της §5.7. Αν τρεις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι φορείς υψών, διαμέσων ή διχοτόμων τριγώνου συντρέχουν.
  (**Ασκήσεις:** §5.9 Σύνθετα 8 και §5.11 Σύνθετα 1)

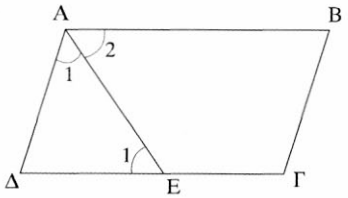
Σχόλιο: *Ισοδύναμη έκφραση είναι "οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται σε σημείο της ε_3"*

- Ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο αν μια διάμεσός του ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς.
  (**Ασκήσεις:** §5.11 Αποδεικτικές 1, 4)

- Για να αποδείξουμε ότι μια παράσταση Α που εξαρτάται από μεταβλητό σημείο Μ παραμένει **σταθερή** θεωρούμε μια ή δυο χαρακτηριστικές (ή οριακές) θέσεις του σημείου Μ και βρίσκουμε την τιμή c της παράστασης Α. Αρκεί τότε, για την τυχαία θέση του Μ, να αποδείξουμε ότι Α = c.
  (**Ασκήσεις:** §5.3 – 5.5 Σύνθετα 3)

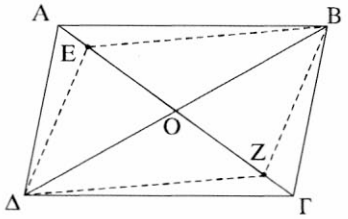
§ 5.1 - 5.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης



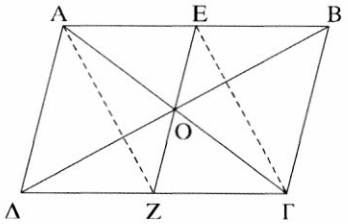
1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 = \hat{E}_1\end{array}\right\}\hat{A}_1 = \hat{E}_1 \quad \text{άρα} \quad \Delta E = A\Delta = B\Gamma .$$

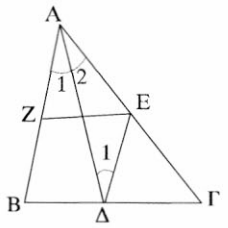


2. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}OE = OZ \\ OB = O\Delta\end{array}\right\} \text{ αρα } BE\Delta Z \text{ παραλληλόγραμμο.}$$



3. i) Έχουμε ΑΕ//=ΓΖ άρα ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο
ii) Οι ΑΓ, ΒΔ ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται από το Ο. Οι ΕΖ, ΑΓ είναι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ, οπότε η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ο της ΑΓ. Άρα ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν.

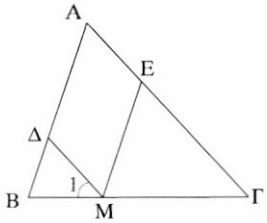


4. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 = \hat{E}_1\end{array}\right\}\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1, \quad \text{οπότε} \quad AE = \Delta E = BZ$$

αφού το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έχουμε: ΜΕ=ΑΔ (1), αφού ΑΔΜΕ παραλληλόγραμμο.

Επίσης: $\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{\Gamma} \\ \hat{M}_1 = \hat{\Gamma}\end{array}\right\}$ αρα $\hat{B} = \hat{M}_1$, οπότε $M\Delta = \Delta B$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $M\Delta + ME = A\Delta + \Delta B = AB$.

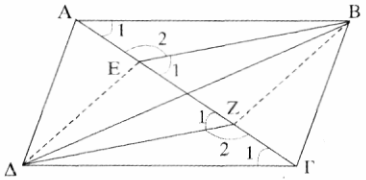
2. Έχουμε: $A\overset{\Delta}{B}E = \Delta\overset{\Delta}{Z}\Gamma$ ($AB = \Delta\Gamma$,

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{E}_2 = \hat{Z}_2$, αφού $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$)

άρα $BE = \Delta Z$

Αλλά $BE // \Delta Z$, οπότε ΔΕΒΖ παραλληλόγραμμο.

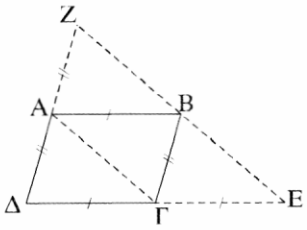
Άρα $\Delta E // BZ$.



3. Φέρουμε ΑΓ. Τότε το ΑΖΒΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΖ//=ΒΓ), οπότε ΒΖ//ΑΓ (1).

Επίσης το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ//=ΓΕ), οπότε ΒΕ//ΑΓ (2).

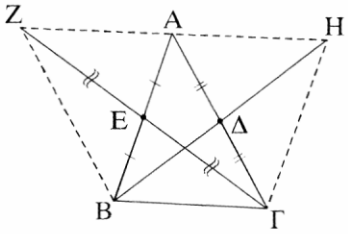
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι Ζ, Β και Ε συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).



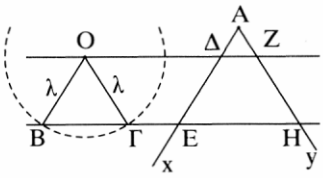
4. Έχουμε ΑΖΒΓ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοι του διχοτομούνται), οπότε ΑΖ//=ΒΓ (1). Επίσης το ΑΗΓΒ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοι του διχοτομούνται), οπότε ΑΗ//=ΒΓ (2). Άρα:

i) ΑΗ=ΑΖ=ΒΓ

ii) Ζ,Α,Η συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).

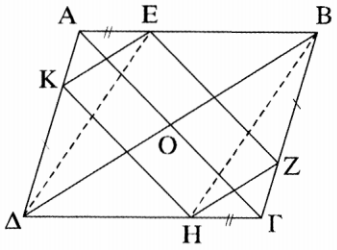


5. Με κέντρο τυχαίο σημείο Ο πάνω στη μία από τις παράλληλες, γράφουμε κύκλο με ακτίνα λ, που τέμνει την άλλη παράλληλο στα Β και Γ. Στη συνέχεια από το Α φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΟΒ και ΟΓ ευθείες. Επειδή τα τετράπλευρα ΟΔΕΒ και ΟΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμα, είναι ΔΕ=ΟΒ=λ και ΖΗ=ΟΓ=λ.



Σύνθετα Θέματα

1. i) Εχουμε:



$\overset{\Delta}{AEK} = \overset{\Delta}{\Gamma HZ}$ $(AE = \Gamma H,\ AK = \Gamma Z,\ \hat{A} = \hat{\Gamma})$

και $\overset{\Delta}{BEZ} = \overset{\Delta}{\Delta KH}(\Delta K = BZ,\ EB = \Delta H,\ \hat{B} = \hat{\Delta})$

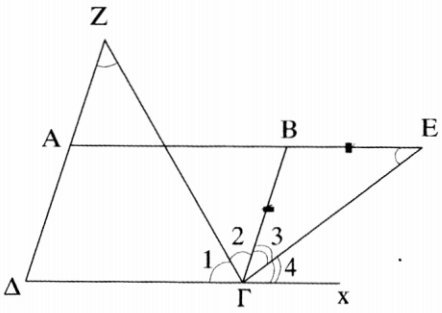
οπότε ΚΕ=ΖΗ και ΕΖ=ΚΗ.

Άρα ΕΖΗΚ παραλληλόγραμμο

ii) Επειδή ΒΕ//=ΔΗ το ΔΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΓ, ΒΔ διαγώνιοι του ΑΒΓΔ} \\ \text{ΒΔ, ΕΗ διαγώνιοι του ΔΕΒΗ} \\ \text{ΕΗ, ΚΖ διαγώνιοι του ΕΖΗΚ} \end{array}\right\} \text{άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν στο Ο.}$$

2. Έχουμε:

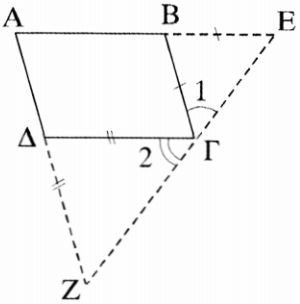


$$\left.\begin{array}{l} \hat{Z} = \hat{\Gamma}_1 \quad (\Delta Z = \Delta\Gamma) \\ \hat{Z} = \hat{\Gamma}_2 \end{array}\right\} \text{άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{\Gamma}_3, \quad (BE = B\Gamma) \\ \hat{E} = \hat{\Gamma}_4 \end{array}\right\} \text{άρα } \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4 \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΖΓ⊥ΓΕ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών) άρα: $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

3. Εχουμε $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{\Gamma}_1 \quad (BE = B\Gamma) \\ \text{και } \hat{B} = \hat{E} + \hat{\Gamma}_1 \ (\text{εξωτ.}) \end{array}\right\} \text{αρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{E} = \frac{\hat{B}}{2} \qquad (1)$$

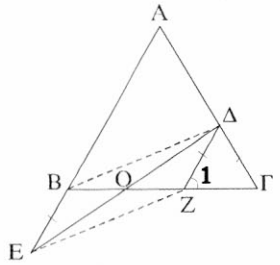
Επίσης στο $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}$:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Z} = \hat{\Gamma}_2 \quad (\Delta\Gamma = \Delta Z) \\ \text{και } \hat{\Delta} = \hat{Z} + \hat{\Gamma}_2 \ (\text{εξωτ}) \end{array}\right\} \text{άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{Z} = \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \qquad (2)$$

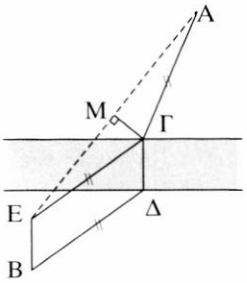
Άρα: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε τα Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

4. Φέρουμε ΔΖ//ΑΒ.
Τότε $\hat{Z}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα ΔΖ=ΔΓ=ΒΕ

Επομένως ΔΖ//=ΒΕ, οπότε το ΒΔΖΕ παραλληλόγραμμο.
Άρα Ο μέσο ΔΕ.



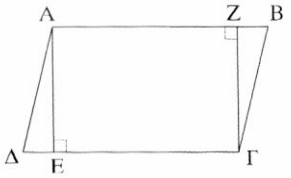
5. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι λυμένο και έστω ΓΔ η θέση της γέφυρας και ΑΓ=ΒΔ, όπου Α και Β τα δύο χωριά. Εάν φέρουμε μια βοηθητική ευθεία ΒΕ, παράλληλη και ίση προς την ΓΔ, παρατηρούμε ότι το σημείο Γ προσδιορίζεται από την κάθετη ΓΜ στο μέσο Μ της ΑΕ (μεσοκάθετος). Πράγματι το ΓΔΒΕ είναι παραλληλόγραμμο (ΓΔ//=ΒΕ) και επομένως ΒΔ=ΕΓ=ΑΓ.



§ 5.3 -5.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

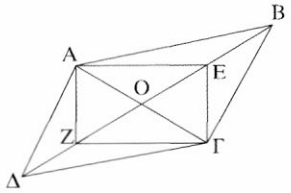
1. Έχουμε ΑΕ||=ΓΖ, οπότε το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή $\hat{E} = 90^\circ$ το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



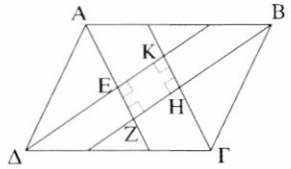
2. Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επειδή

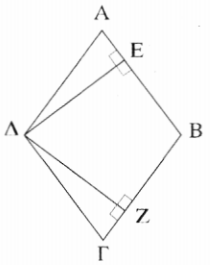
$$EZ = OE + OZ = \frac{OB}{2} + \frac{O\Delta}{2} = \frac{\Delta B}{2} = A\Gamma$$

το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



3. Έχουμε ΑΕ⊥ΔΕ, ΒΗ⊥ΓΗ και ΑΖ⊥ΒΖ γιατί οι διχοτόμοι των εντός και επι τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα (εφαρ. §4.4). Άρα $\hat{E} = \hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, οπότε το ΕΖΗΚ είναι ορθογώνιο.





4. Εστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Τότε

$\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}\,(\hat{A} = \hat{\Gamma},\ \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ,\ A\Delta = \Delta\Gamma)$.

Αρα ΔΕ=ΔΖ .

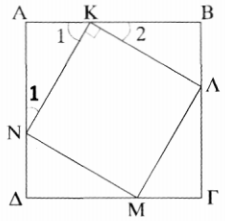
Εστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΔΕ=ΔΖ.

Τότε $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}\,(\hat{A} = \hat{\Gamma},\ \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ,\ \Delta E = \Delta Z)$.

Αρα ΑΔ=ΔΓ, οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

5. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} EZ \perp B\Delta \\ EZ = B\Delta \\ \text{Ο μέσο } EZ, \Delta B \end{array}\right\} \text{Αρα το } \Delta EBZ \text{ είναι τετράγωνο.}$$



6. Εχουμε $\overset{\Delta}{AKN} = \overset{\Delta}{BK\Lambda} = \overset{\Delta}{M\Gamma\Lambda} = \overset{\Delta}{M\Delta N}$

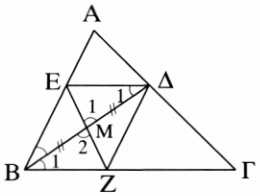
οπότε ΚΛ=ΛΜ=ΜΝ=ΝΚ (1)

Επίσης $\hat{K}_2 = \hat{N}_1$, οπότε

$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 = \hat{K}_1 + \hat{N}_1 = 90^\circ$ Άρα $\hat{K} = 90^\circ$ (2)

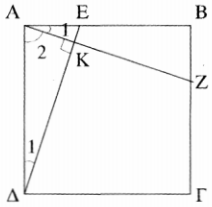
Από (1), (2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έχουμε $\overset{\Delta}{\Delta EM} = \overset{\Delta}{MBZ}$ $(BM = M\Delta, \hat{M}_1 = \hat{M}_2,\ \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1)$!

Άρα ΔΕ=ΒΖ. Αλλά ΔΕ//ΒΖ, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$ το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.



2. i) $\overset{\Delta}{ABZ} = \overset{\Delta}{A\Delta E}$ $(AE = BZ,\ AB = A\Delta,\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ)$.

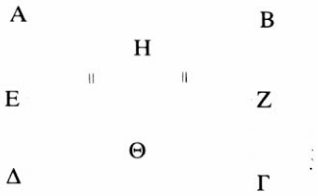
Αρα ΑΖ=ΔΕ

ii) Εχουμε

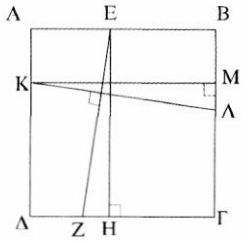
$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, οποτε $\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$, οπότε

$\hat{K} = 90^\circ$ (στο τριγ. ΑΔΚ). Άρα ΑΖ⊥ΔΕ.

3. Έχουμε ΕΒΖΔ παραλληλόγραμμο (ΒΖ\\=ΔΕ), οπότε ΒΕ//=ΔΖ. Αρα ΕΗ//=ΖΘ και ΕΗ=ΗΖ (αφού ΑΒΖΕ, ΔΓΖΕ ορθογώνια). Επομένως το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

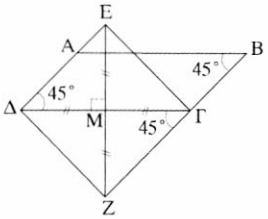


4. Έστω ΚΛ⊥ΕΖ. Φέρουμε ΕΗ⊥ΔΓ και ΚΜ⊥ΒΓ.
Τότε ΚΜ=⊥ΕΗ.
Άρα $\overset{\Delta}{EZH} = \overset{\Delta}{K\Lambda M}$ ($\hat{H} = \hat{M} = 90^\circ$, ΚΜ = ΕΗ, $\hat{K} = \hat{E}$ ως οξείες με κάθετες πλευρές).
Επομένως ΕΖ=ΚΛ.

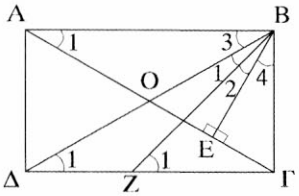


Σύνθετα Θέματα

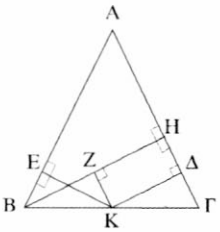
1. Έχουμε
$\overset{\Delta}{ME\Delta} = \overset{\Delta}{MZ\Gamma}$ ($\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$, ΔΜ = ΜΓ, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$),
οπότε ΔΕ=ΓΖ. Αλλά ΔΕ//ΓΖ οπότε το ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΕΖ⊥ΔΓ και ΔΜ=ΜΕ ($\hat{\Delta} = 45^\circ$), οπότε ΕΖ=ΔΓ το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.



2. Έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\Delta}_1$ (1) (αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ (2) (οξείες με κάθετες πλευρές). Επομένως $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1$ (ως εξωτερική) $\overset{(1),(2)}{=} \hat{B}_4 + \hat{B}_1 = \hat{B}_4 + \hat{B}_2$,
οπότε $\hat{Z}_1 = \Gamma\hat{B}Z$. Άρα ΒΓ=ΓΖ.



3. i) Έστω Κ τυχαίο σημείο της βάσης, ΒΓ, ΚΔ⊥ΑΓ, ΚΕ⊥ΑΒ.
Φέρουμε ΚΖ⊥ΒΗ. Τότε ΚΔ=ΖΗ και ΚΕ=ΒΖ
(αφού $\overset{\Delta}{BEK} = \overset{\Delta}{BZK}$ γιατί $\hat{Z} = \hat{E} = 90^0$, ΚΒ κοινή, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = B\hat{K}Z$).
Άρα ΚΔ+ΚΕ=ΖΗ+ΒΖ=ΒΗ=σταθερό.

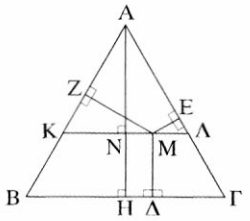


ii) Εστω Μ τυχαίο σημείο. Φέρουμε από το Μ παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ,Λ. αντίστοιχα. Τότε από το i) έχουμε:

ΜΖ+ΜΕ=ΑΝ (1) (αφού το τριγ. ΑΚΛ είναι ισόπλευρο).

Επίσης ΜΔ=ΝΗ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΜΔ+ΜΕ+ΜΖ=ΑΗ=σταθερό.

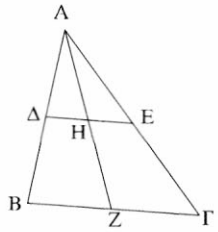


§ 5.6 - 5.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\left.\begin{matrix}\Delta \text{ μεσο } AB \\ E \text{ μεσο } A\Gamma\end{matrix}\right\}$αρα $\Delta E // B\Gamma$

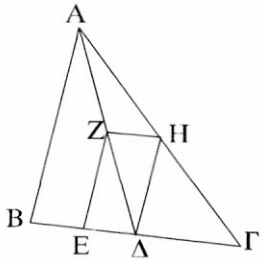
και $\overset{\Delta}{ABZ}$: $\left.\begin{matrix}\Delta \text{ μεσο } AB \\ \Delta E // B\Gamma\end{matrix}\right\}$ άρα Η μέσο ΑΖ.



2. Εχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\left.\begin{matrix}H \text{ μεσο } A\Gamma \\ \Delta \text{ μεσο } B\Gamma\end{matrix}\right\}$αρα $\Delta H // = \frac{AB}{2}$ (1)

και $\overset{\Delta}{AB\Delta}$: $\left.\begin{matrix}Z \text{ μεσο } A\Delta \\ E \text{ μεσο } B\Delta\end{matrix}\right\}$ αρα $ZE // = \frac{AB}{2}$ (2)

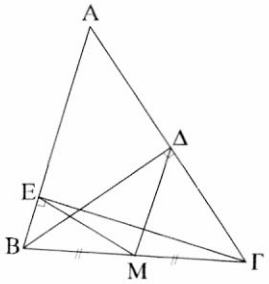
Από (1), (2) προκύπτει ότι ΔΗ//=ΖΕ, οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



3. Έχουμε $\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}$ $(\hat{\Delta} = 90^\circ, \Delta M$ διαμεσος$)$: $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$

και $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$ $(\hat{E} = 90^\circ, EM$ διαμεσος$)$: $EM = \frac{B\Gamma}{2}$

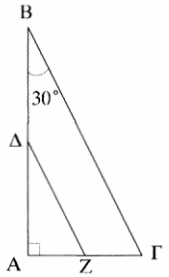
Άρα ΜΔ=ΜΕ.



4. $A\overset{\Delta}{B}\Gamma(\hat{A} = 90^\circ,\ \hat{B} = 30^\circ)$: $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και

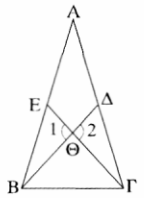
$A\overset{\Delta}{B}\Gamma(E, Z$ μέσα $AB, A\Gamma)$: $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Άρα $EZ = A\Gamma$.

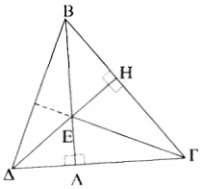


5. Έχουμε $B\overset{\Delta}{\Theta}E = \Gamma\overset{\Delta}{\Theta}\Delta(\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2,\quad B\Theta = \Theta\Gamma,\quad \Theta\Delta = \Theta E)$

Άρα $BE = \Gamma\Delta$, οπότε $\beta=\gamma$.



6. Στο τρίγωνο ΒΔΓ τα ΒΑ και ΔΗ είναι ύψη, οπότε το Ε είναι το ορθόκεντρο. Άρα $\Gamma E \perp \Delta B$.

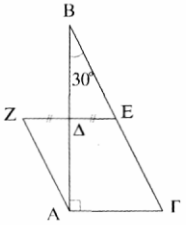


7. Έχουμε: $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$: $(\Delta, E$ μέσα $AB, B\Gamma)$ άρα $\Delta E || = \dfrac{A\Gamma}{2}$ οπότε

$ZE=2\Delta E//=A\Gamma$. Επομένως το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Αλλά $\hat{B} = 30^\circ$, οπότε $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

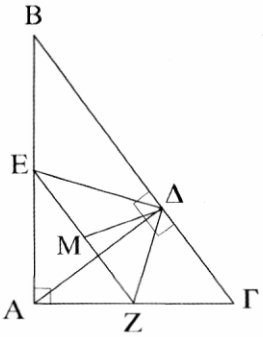
1.i) Έχουμε: $\Delta\overset{\Delta}{E}Z = A\overset{\Delta}{E}Z$ (EZ κοινή,

$\Delta E = \dfrac{AB}{2} = AE,\qquad \Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2} = AZ)$.

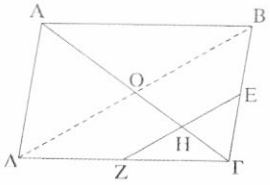
Άρα $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^\circ$.

ii) Έχουμε: $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ (E, Z μέσα AB, $A\Gamma$): $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (1) και $E\overset{\Delta}{\Delta}Z$

($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔM διάμεσος): $\Delta M = \dfrac{EZ}{2}$ (2)



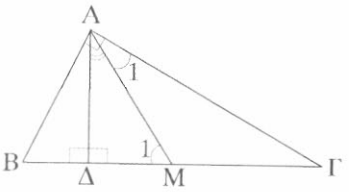
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.



2. Φέρουμε ΔΒ. Τότε έχουμε:

$\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$ (Ε, Ζ μεσα ΒΓ, ΓΔ): ΕΖ // ΒΔ, οπότε Η μέσο του ΓΟ.

Άρα: $\Gamma H = \frac{\Gamma O}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.



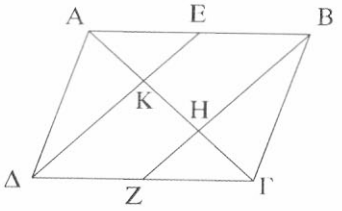
3. Στο τριγ. ΜΑΔ είναι: $M\hat{A}\Delta + \hat{M}_1 = 90^\circ$ (1)

Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$ (2) (αφού $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$)

και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

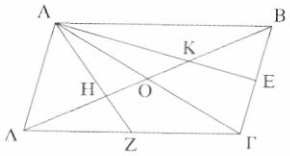
$M\hat{A}\Delta + 2\hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ ή $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



4. Έχουμε ΒΕ//=ΔΖ, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΔΕ//ΒΖ. Επομένως στο τριγ. ΑΒΗ: $\left.\begin{matrix} \text{Ε μέσο ΑΒ} \\ \text{ΕΚ}\|\text{ΒΗ} \end{matrix}\right\}$ άρα ΑΚ=ΚΗ (1)

και στο τριγ. ΓΔΚ: $\left.\begin{matrix} \text{Ζ μεσο ΔΓ} \\ \text{ΖΗ}\|\text{ΔΚ} \end{matrix}\right\}$ άρα ΓΗ=ΚΗ (2)

Από (1), (2) είναι ΑΚ = ΚΗ = ΓΗ.



5. Φέρουμε ΑΓ τότε: $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: ΑΕ, ΒΟ διάμεσοι, οπότε Κ βαρύκεντρο. Άρα: $BK = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3}$ (1)

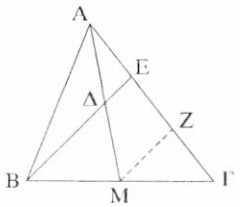
και

$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$: ΑΖ, ΔΟ διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.

Άρα: $\Delta H = \frac{2}{3}\Delta O = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3}$ (2)

Από τις (1), (2) θα είναι και $KH = \frac{B\Delta}{3}$, οπότε $\Delta H = KH = BK = \frac{\Delta B}{3}$.

6. Έστω Ζ το μεσο ΕΓ. Τότε:

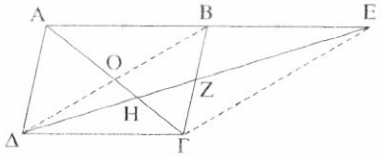


$\overset{\Delta}{BE\Gamma}$(Μ, Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ): ΜΖ||ΒΕ (1) και

$\overset{\Delta}{AMZ}$(Δ μέσο ΑΜ, ΔΕ||ΜΖ από (1)):

Ε μέσο ΑΖ, οπότε: $AE = EZ = \frac{E\Gamma}{2}$.

7. i) Έχουμε ΒΕ=ΑΒ=ΓΔ, οπότε ΒΕ//=ΓΔ άρα το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



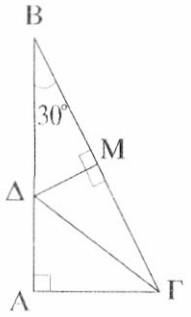
Επομένως ΒΖ=ΖΓ.

ii) Στο τριγ. ΒΔΓ: ΓΟ, ΔΖ διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.

Άρα: $\Gamma H = \frac{2}{3}\Gamma O = \frac{2}{3}\frac{A\Gamma}{2}$ ή $\Gamma H = \frac{1}{3}A\Gamma$.

Επομένως $AH = \frac{2}{3}A\Gamma$. Άρα $\Gamma H = \frac{AH}{2}$.

8. i) Έχουμε



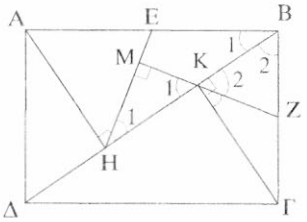
$\overset{\Delta}{M\Delta\Gamma} = \overset{\Delta}{\Gamma A\Delta}$ ($\hat{M} = \hat{A} = 90^\circ$, ΔΓ κοινή, $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$

Αρα ΜΔ=ΑΔ

ii) $\overset{\Delta}{M\Delta B}$($\hat{M} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$): $M\Delta = \frac{\Delta B}{2} \Leftrightarrow \Delta B = 2M\Delta$.

Αλλά ΑΔ=ΜΔ, οπότε: $\Delta B + A\Delta = 3M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{AB}{3}$.

9. Αρκεί $\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = 90^\circ$ (στο τριγ. ΜΗΚ). Έχουμε:



$\overset{\Delta}{AHB}$:($\hat{H} = 90^\circ$, ΗΕ διαμεσος) Αρα $\hat{H}_1 = B_1$ (1)

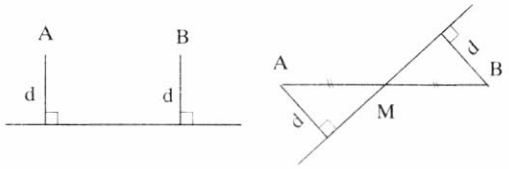
και $\overset{\Delta}{KB\Gamma}$

($\hat{K} = 90^\circ$, ΚΖ διαμεσος) Αρα $\hat{K}_2 = \hat{K}_1 = \hat{B}_2$ (2)

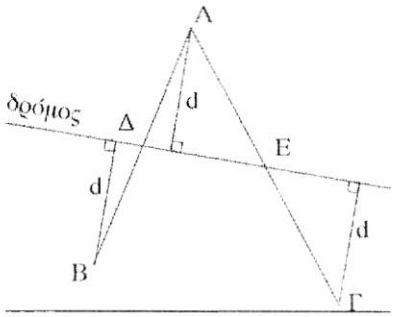
Επομένως $\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B} = 90^\circ$.

10. Παρατήρηση :

Δύο σημεία Α και Β ισαπέχουν: i) Από κάθε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ ii) Από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ΑΒ.



Έστω Α,Β και Γ τα τρία χωριά. Σύμφωνα με την παρατήρηση ο δρόμος πρέπει να συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Προφανώς υπάρχουν τρεις τέτοιοι δρόμοι.



Σύνθετα Θέματα

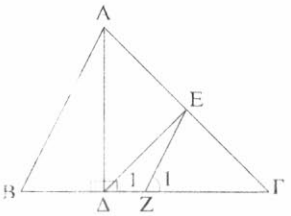
1. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: (Ε,Ζ μέσα ΑΓ, ΒΓ).

Άρα ΕΖ||ΑΒ οπότε $\hat{B} = \hat{Z}_1$ (1) και

$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$:($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΕ διάμεσος)

Αρα $\Delta E = E\Gamma$ οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{Z}_1$ (2)

Αλλά $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \Delta\hat{E}Z \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Τότε ΑΒ = ΒΜ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B} = 15^\circ$.

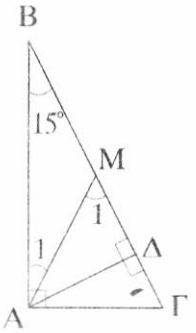
Άρα $M_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} = 30^\circ$. Επομένως στο τριγ. ΜΑΔ είναι

$\Delta = 90^\circ$, $\hat{M}_1 = 30^\circ$ άρα $A\Delta = \frac{AM}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$, αφού $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αντίστροφα. Αν $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$, τότε επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε

$A\Delta = \frac{AM}{2}$, οπότε στο ορθογώνιο τριγ. ΜΑΔ είναι $\hat{A}_1 = 30^\circ$.

Αρα $B = \frac{\hat{M}_1}{2} = 15^\circ$.

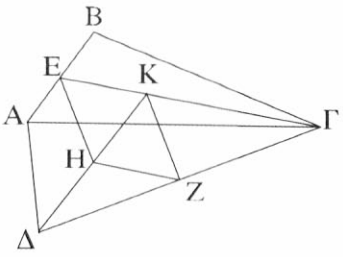


3. Έχουμε $K\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$: (Z, H μέσα ΔΓ, ΔΚ).

Άρα $ZH\backslash\backslash = \frac{K\Gamma}{2}$ (1)

και Κ βαρύκεντρο του τριγ. ΑΒΓ άρα $EK = \frac{K\Gamma}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ZH\\=EK, οπότε το ΕΚΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα EH//KZ



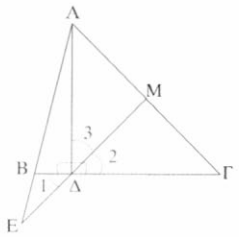
4. Επειδή ΒΔ=ΒΕ έχουμε $\hat{E} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Αλλά $\hat{B} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1$,

οπότε $\hat{B} = 2\hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 2\hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$.

Άρα ΔΜ=ΜΓ (1).

Επίσης $\hat{\Delta}_3 = \hat{A}_1$ (συμπληρωματικές ίσων γωνιών), οπότε ΔΜ=ΑΜ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΜ=ΜΓ.



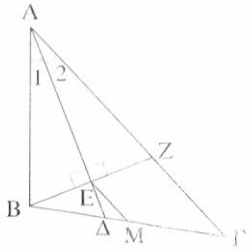
5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τότε το τριγ. ΑΒΖ είναι ισοσκελές (ΑΕ διχοτόμος και ύψος), οπότε ΑΒ=ΑΖ (1) και Ε μέσο του ΒΖ (2). Άρα:

i) $B\overset{\Delta}{Z}\Gamma$ (Ε μέσο ΒΖ, Μ μέσο ΒΓ): $EM || = \frac{Z\Gamma}{2}$ (3).

Επομένως ΕΜ||ΑΓ.

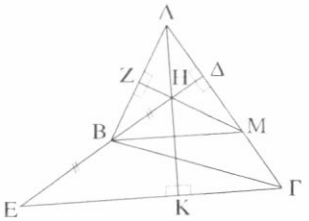
ii) $EM = \frac{Z\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AZ}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

iii) $\Delta\hat{E}M = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$, αφού ΕΜ||ΑΓ.



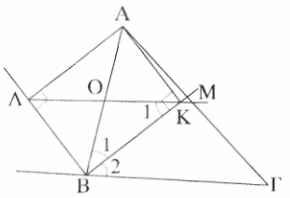
6. Εστω ΜΖ⊥ΑΒ που τέμνει την ΒΔ στο Μ. Αρκεί ΑΗ⊥ΓΕ. Στο τριγ. ΑΒΜ το Η είναι το ορθόκεντρο, οπότε ΑΗ⊥ΒΜ (1). Επίσης στο τριγ. ΔΕΓ τα Β και Μ είναι μέσα των ΔΕ και ΔΓ, οπότε ΒΜ||ΓΕ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΗ⊥ΓΕ.



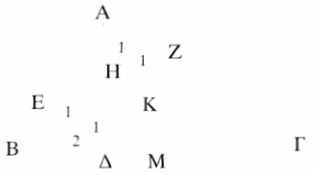
5.6-5.9

7. i) Έχουμε $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ και $K\hat{B}\Lambda = 90^\circ$
(διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).
Άρα το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.
ii) Επειδή ΑΚΒΛ ορθογώνιο είναι: Ο μέσο ΑΒ και $\hat{K}_1 = \hat{B}_1 - \hat{B}_2$ οπότε ΟΚ||ΒΓ. Επομένως στο τριγ. ΑΒΓ έχουμε Ο μέσο ΑΒ, ΟΚ||ΒΓ. Αρα Μ μεσο ΑΓ.



8. i) $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$. Άρα το ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο, οπότε ΑΔ=ΕΖ

ii) Επειδή ΑΕΔΖ ορθογώνιο έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$. Αλλά $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (οξείες με κάθετες πλευρές), οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ (1). Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (2) $(AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma)$



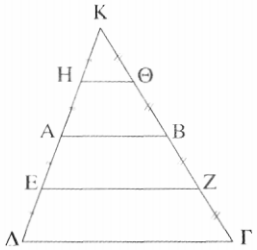
Από (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$
Άρα $\hat{H} = 90^\circ$ οπότε ΑΜ⊥ΕΖ

iii) Εστω Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ. Αρκεί ΒΚ||ΕΖ . Έχουμε ΒΕ||ΚΖ (ώς κάθετες στην ΑΓ) και $\overset{\Delta}{AKZ} = \overset{\Delta}{BE\Delta}$ $(\hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ,\ \Delta E = AZ,\ \hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2)$, οπότε ΒΕ=ΚΖ. Άρα ΚΖ||=ΒΕ, οπότε το ΒΕΖΚ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς ΒΚ//ΕΖ.

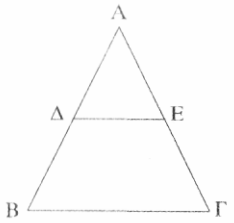
§ 5.10-5.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

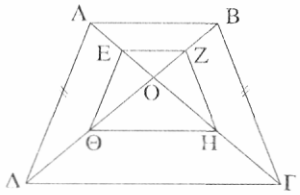
1. Έχουμε ΕΖ//ΑΒ (διάμεσος τραπεζίου) (1) και $\overset{\Delta}{KAB}$: (Η, Θ μεσα ΚΑ, ΚΒ).
Άρα ΗΘ//ΑΒ (2). Από (1) (2) προκύπτει ότι ΗΘ//ΑΒ//ΕΖ, οπότε το ΕΖΘΗ είναι τραπέζιο.



2. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ). Άρα ΔΕ//ΒΓ (1)
και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2) (ΑΒ=ΑΓ).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

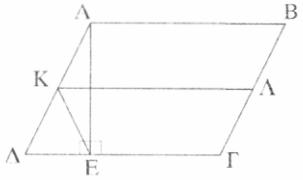


3. Έχουμε $\overset{\Delta}{OAB}$: (Ε,Ζ μέσα ΟΑ, ΟΒ). Άρα ΕΖ//ΑΒ (1)
$\overset{\Delta}{O\Delta\Gamma}$: (Θ,Η μέσα ΟΔ, ΟΓ). Άρα ΘΗ//ΔΓ (2)
Επειδή ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο είναι ΑΓ=ΒΔ οπότε
$\frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow EH = \Theta Z$ (3)

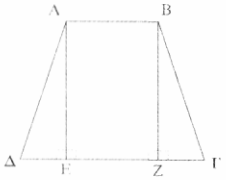


Από τις (1), (2) (3) προκύπτει ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

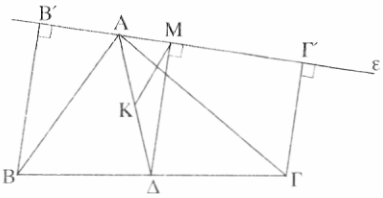
4. Έχουμε ΚΛ//ΑΒ//ΓΔ. Άρα ΚΛ//ΕΓ. Επίσης $\overset{\Delta}{AE\Delta}$
($\hat{E} = 90^\circ$ ΕΚ διάμεσος). Άρα $EK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \Lambda\Gamma$.
Επομένως το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



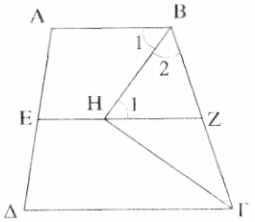
5. Έχουμε $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{BZ\Gamma}$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, ΑΕ=ΒΖ, ΑΔ=ΒΓ)
Άρα ΔΕ=ΓΖ (1)
Επίσης ΓΔ=ΔΕ+ΕΖ+ΖΓ=2ΔΕ+ΕΖ=2ΔΕ+ΑΒ
Άρα $\Delta E = \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.



6. Το τετράπλευρο ΒΒΓΓ είναι τραπέζιο, αφού ΒΒ//ΓΓ, ως κάθετες στην ε. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε ΜΔ//ΒΒ//ΓΓ. Άρα ΔΜ⊥ε. Επομένως η ΜΚ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΜΔ, οπότε $MK = \frac{A\Delta}{2}$.



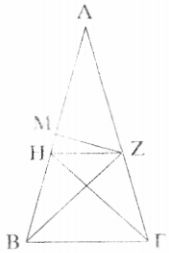
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έχουμε:

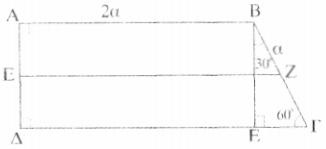
$$\left.\begin{array}{l} AB // EZ, \text{ οποτε } \hat{B}_1 = \hat{H}_1 \\ \text{Αλλα } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array}\right\} \text{ Αρα } \hat{H}_1 = \hat{B}_2 \text{, οπότε:}$$

$HZ = BZ = Z\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{Z}$. Άρα $B\hat{H}\Gamma = 90^\circ$.



2. Επειδή ZH//BΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ το ZHBΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΓH=BZ

Αλλά BZ=AZ (ZM μεσοκάθετος AB). Άρα ΓH=AZ.



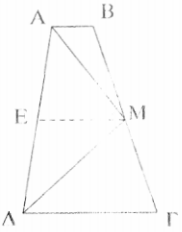
3. Φέρουμε BE′⊥ΔΓ. Τότε στο τριγ.

BE′Γ($\hat{E}' = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$). Άρα

$E'\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. Επομένως

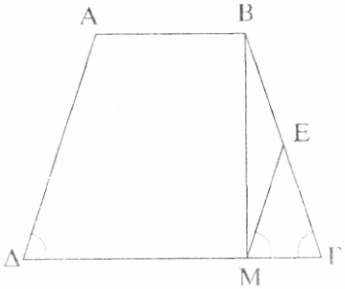
$\Delta\Gamma = \Delta E' + E'\Gamma = AB + E'\Gamma = 2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$

Άρα $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{2\alpha + \frac{5\alpha}{2}}{2} = \dfrac{9\alpha}{4}$.



4. Έστω Ε μέσο ΑΔ. Τότε $ME = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{A\Delta}{2}$, οπότε

$A\hat{M}\Delta = 90^\circ$ (αφού ΜΕ διάμεσος στο τριγ. ΑΜΔ).

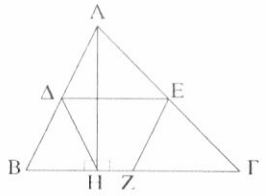


5. Έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ Ισοσκελές)

και $\hat{\Delta} = \hat{M}_1$ (ΑΔ//ΜΕ)

Άρα $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$, οπότε $ME = E\Gamma = BE = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $B\hat{M}\Gamma = 90^\circ$ ή BM⊥ΔΓ

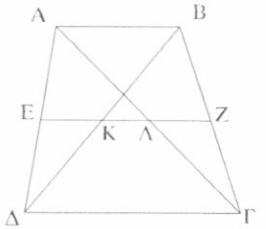


6. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (Δ,Ε μεσα ΑΒ, ΑΓ) Άρα ΔΕ//ΒΓ, οπότε ΔΕ//ΗΖ (1)

Επίσης $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (Ε, Ζ μεσα ΑΓ, ΒΓ). Άρα $EZ = \frac{AB}{2}$ (2) και

$\overset{\Delta}{AHB}$ ($\hat{H} = 90^\circ$, ΗΔ διάμεσος). Άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



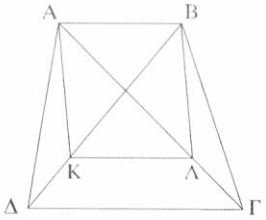
7. Έστω ΓΔ=2ΑΒ Έχουμε

$\overset{\Delta}{AB\Delta}$ (Ε, Κ μέσα ΑΔ, ΔΒ) Άρα $EK = \frac{AB}{2}$ (1) και

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (Ζ, Λ μέσα ΒΓ, ΑΓ). Άρα $\Lambda Z = \frac{AB}{2}$ (2)

Επίσης $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{2AB - AB}{2} = \frac{AB}{2}$ (3)

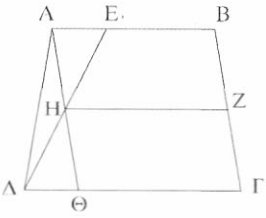
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ΕΚ=ΚΛ=ΛΖ.



8. Έχουμε ΚΛ//ΔΓ//ΑΒ και

$K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB,$

οπότε ΚΛ//=ΑΒ. Άρα το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Αν το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο, τότε ΒΚ=ΑΛ, οπότε ΒΔ=ΑΓ. Άρα το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι *ισοσκελές* τραπέζιο.

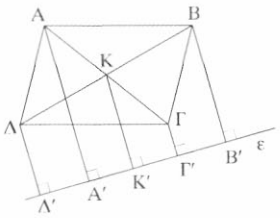


9. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε

$$ZH = \frac{EB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{\frac{AB}{2} + \frac{3}{2}AB}{2} = AB$$

Άρα ΗΖ//=ΑΒ, οπότε το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης ΘΔ = ΔΓ – ΘΓ = ΔΓ – ΑΒ, αφού το ΑΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Το ΑΓΓ΄Α΄ είναι τραπέζιο με διάμεσο ΚΚ΄.



Άρα $KK' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow AA' + \Gamma\Gamma' = 2KK'$ (1)

Επίσης το ΒΒ΄Δ΄Δ είναι τραπέζιο με διάμεσο ΚΚ΄.

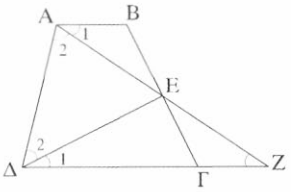
Αρα $KK' = \dfrac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow BB' + \Delta\Delta' = 2KK'$ (2)

Από τις (1) (2) προκύπτει ότι

$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4KK'$.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Αρκεί ΔΕ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$. Αν Ζ το σημείο τομής των ΑΕ, ΔΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{Z}$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{Z}$.



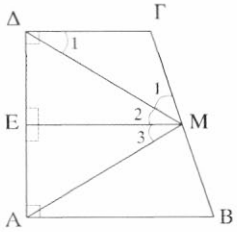
Άρα $A\Delta = \Delta Z \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$.

$\Leftrightarrow AB + \Gamma\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow AB = \Gamma Z$.

Επομένως το ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ//=ΓΖ).

Άρα Ε μέσο ΑΖ, οπότε η διάμεσος ΔΕ του ισοσκελούς τριγ. ΑΔΖ είναι και διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

2. Φέρουμε ΜΕ⊥ΑΔ, οπότε ΜΕ διάμεσος. Τότε



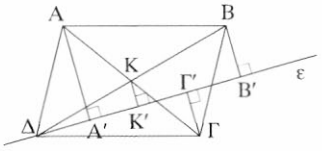
$\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (\Gamma M = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta)$

$\hat{M}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{M}_3 = \hat{M}_2$ (ΜΕ ύψος και διάμεσος)

Άρα: $A\hat{M}\Gamma = 3\hat{M}_3 = 3M\hat{A}B$, αφου $\hat{M}_3 = M\hat{A}B$.

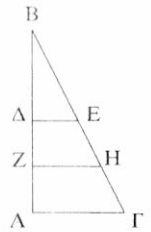
3. Έστω Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ και ΚΚ΄⊥ε. Τότε το ΚΚ΄ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΑ΄ΓΓ΄οπότε $KK' = \dfrac{AA' - \Gamma\Gamma'}{2}$ (1)



Επίσης στο τριγ. ΔΒΒ΄ είναι $KK' = \dfrac{BB'}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΑ΄-ΓΓ΄=ΒΒ΄.

4. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ). Άρα $\Delta E || = \frac{A\Gamma}{2}$ (1)



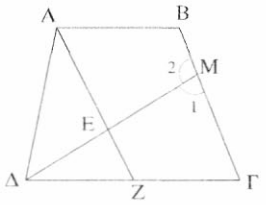
Επομένως το ΔΕΓΑ είναι τραπέζιο με διάμεσο τη ΖΗ.

Άρα: $ZH = \frac{\Delta E + A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2ZH = \frac{3}{2}A\Gamma$

Αλλά $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$, οπότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\underline{\hat{B} = 30^\circ}$.

5. i) Επειδή ΔΜ=ΔΓ είναι $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$, οπότε $\hat{B} = \hat{M}_2$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών). Άρα το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΑΜ=ΒΕ.

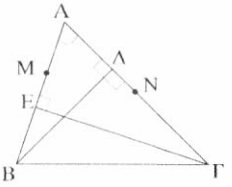


ii) Αν η ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ τότε ΑΖ=ΒΓ (1) (αφού ΑΒΓΖ παραλληλόγραμμο) και $EZ = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow EZ = \frac{B\Gamma}{4}$ (2)

Αρα $AE = AZ - EZ = B\Gamma - \frac{B\Gamma}{4} = \frac{3}{4}B\Gamma$

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω ΑΒ<ΑΓ Τότε:



$\overset{\Delta}{AB\Delta}$: $(\hat{\Delta} = 90^\circ,\ \hat{A} = 60^\circ,\ \hat{B} = 30^\circ)$

Άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} < \frac{A\Gamma}{2}$ (1) και

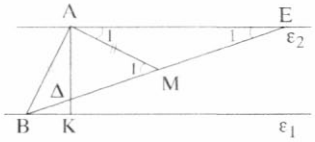
$\overset{\Delta}{A\Gamma E}$: $(\hat{E} = 90^\circ,\ \hat{A} = 60^\circ,\ \hat{\Gamma} = 30^\circ)$

Άρα $AE = \frac{A\Gamma}{2} > \frac{AB}{2}$ (2). Επομένως

$ME = AE - AM = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2}$ και

$N\Delta = AN - A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2}$. Άρα ΜΕ=ΝΔ.

2. Έχουμε $E\hat{B}K = \hat{E}_1$ (1)



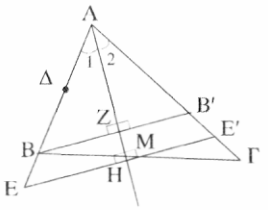
Έστω Μ το μέσο του ΔΕ. Τότε: $AM = \frac{\Delta E}{2} = AB$

Άρα $A\hat{B}M = \hat{M}_1$ (2)

Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{E}_1 + \hat{A}_1 = 2\hat{E}_1$ (AM = ME) (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $A\hat{B}M = 2E\hat{B}K$.

Άρα $A\hat{B}K = A\hat{B}M + E\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.



3. α) Έχουμε ΑΒ=ΑΒ΄ και ΑΕ=ΑΕ΄ (1) (γιατί τα τριγ. ΑΒΒ΄ και ΑΕΕ΄ είναι ισοσκελή). Άρα:

$B'E' = AE' - AB' = AE - AB = A\Delta + \Delta E - AB =$

$= \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} - AB = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

β) Έχουμε:

$\Gamma E' = A\Gamma - AE' = A\Gamma - AE = A\Gamma - A\Delta - \Delta E =$

$= A\Gamma - \frac{AB}{2} - \frac{A\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Άρα Β΄Ε΄=ΓΕ΄ Επομένως στο τριγ. ΓΒΒ΄ (Ε΄ μέσο ΓΒ΄, ΕΕ΄//ΒΒ΄). Άρα Μ μέσο ΒΓ.

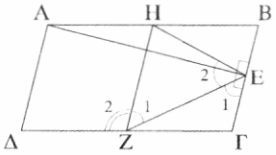
4. α) Επειδή ΗΒ//=ΖΓ και $HB = \frac{AB}{2} = B\Gamma$ το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος.

β) Έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1$ (1).

Επίσης στο τριγ. ΑΕΒ ($\hat{E} = 90^\circ$, ΕΗ διάμεσος).

Άρα $EH = \frac{AB}{2} = HZ$, οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_2$ (2)

Από (1) (2) προκύπτει ότι ΖΕ διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$

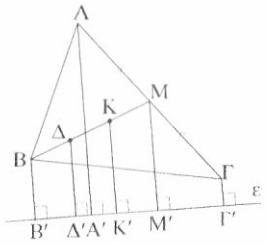


γ) Επειδή ΕΓ//ΗΖ και $HE = \frac{AB}{2} = Z\Gamma$ το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Επειδή ΗΕΓΖ ισοσκελές τραπέζιο είναι $\hat{\Gamma} = H\hat{E}\Gamma = 2Z\hat{E}\Gamma$ (3)

Επίσης $\hat{Z}_1 = Z\hat{E}\Gamma$ (4) και $\hat{Z}_2 = \hat{\Gamma}$ (5)

Από (3), (4), (5) προκύπτει ότι $\Delta\hat{Z}E = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 = 3Z\hat{E}\Gamma$.



5. Στο τραπέζιο ΑΓΓ΄Α΄ η ΜΜ΄ είναι διάμεσος.

Άρα $MM' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow AA' + \Gamma\Gamma' = 2MM'$ (1)

Έστω Δ το μέσο του ΒΚ.

Τότε ΒΔ=ΔΚ=ΚΜ. Επομένως στο τραπέζιο ΒΚΚ΄Β΄ η ΔΔ΄ είναι διάμεσος.

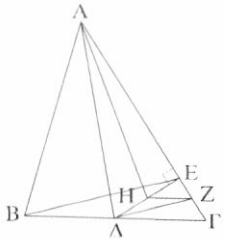
Άρα $\Delta\Delta' = \dfrac{BB' + KK'}{2} \Leftrightarrow BB' + KK' = 2\Delta\Delta'$ (2)

Επίσης στο τραπέζιο ΔΜΜ΄Δ΄ η ΚΚ΄ είναι διάμεσος. Άρα

$KK' = \dfrac{MM' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow MM' + \Delta\Delta' = 2KK'$

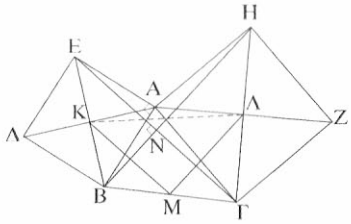
$\Leftrightarrow 2MM' + 2\Delta\Delta' = 4KK'$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ΑΑ΄+ΒΒ΄+ΓΓ΄=3ΚΚ΄.



6. α) Έχουμε $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$ (Δ,Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ). Άρα ΔΖ//ΒΕ

β) $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ (Ζ, Η μέσα ΕΓ, ΔΕ). Άρα ΖΗ//ΔΓ, οπότε ΖΗ⊥ΑΔ (αφού ΑΔ⊥ΔΓ). Επομένως το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγ. ΑΔΖ. Άρα ΑΗ⊥ΔΖ, οπότε ΑΗ⊥ΒΕ (αφού ΒΕ//ΔΖ).



7. Έχουμε $\overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{A\Gamma E}$

$(AB = AE,\ A\Gamma = AH,\ E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H = 90^\circ + \hat{A})$

Άρα ΕΓ=ΒΗ (1) και

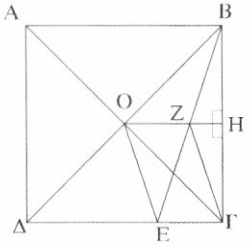
$\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ οπότε $\hat{N} = E\hat{A}B = 90^\circ$ Άρα ΕΓ⊥ΒΗ (2)

Αλλά $KM // = \dfrac{E\Gamma}{2}$ (3) (τριγ. ΕΒΓ)

και $M\Lambda // = \dfrac{BH}{2}$ (4) (τριγ. ΗΓΒ).

Από τις (1), (2), (3), (4) προκύπτει ότι ΚΜ ⊥=ΜΛ.

8. α) Έχουμε Μ μέσο ΟΓ, Η μέσο ΒΓ και $OH=\frac{\alpha}{2}$



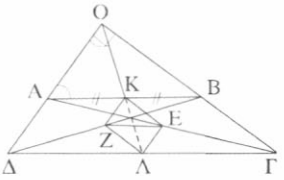
Στο τριγ. ΒΟΓ το Ζ είναι το βαρύκεντρο, οπότε $OZ=\frac{2}{3}OH=\frac{2}{3}\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{3}$

β) Είναι $ZH//=\frac{E\Gamma}{2}$ (τριγ. ΒΕΓ) και $ZH=\frac{OZ}{2}$ (Ζ βαρυκ.)

Αρά ΟΖ//=ΕΓ, οπότε το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9. i) Έστω Κ μέσο ΑΒ και Λ το σημείο τομής των ΟΚ και ΔΓ.

Αρκεί Λ μέσο ΔΓ.



Έχουμε $O\hat{A}B(\hat{O}=90^\circ$, ΟΚ διαμεσος)

Άρα $\hat{O}_1=\hat{A}_1$. Αλλά $\hat{A}_1=\hat{\Delta}$, οπότε $\hat{O}_1=\hat{\Delta}$ ή ΟΛ=ΔΛ.

Όμοια ΟΛ=ΛΓ. Άρα το Λ είναι το μέσο του ΔΓ

ii) $K\Lambda=O\Lambda-OK=\frac{\Delta\Gamma}{2}-\frac{AB}{2}$

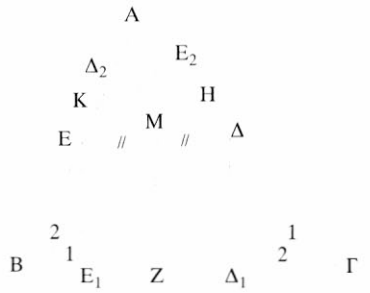
(αφού $OK=\frac{AB}{2}$, $O\Lambda=\frac{\Delta\Gamma}{2}$)

iii) Το ΚΕΛΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί $KZ//=\Lambda E//=\frac{A\Delta}{2}$ (από το τριγ. ΑΒΓ και ΑΓΔ). Επειδή $ZE=\frac{\Delta\Gamma-AB}{2}=K\Lambda$, το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

10. Φέρουμε:

$\left.\begin{matrix}\Delta\Delta_1\perp B\Gamma\\ \Delta\Delta_2\perp AB\end{matrix}\right\}$ οπότε $\Delta\Delta_1=\Delta\Delta_2$ (1) και

$\left.\begin{matrix}EE_1\perp B\Gamma\\ EE_2\perp A\Gamma\end{matrix}\right\}$ οπότε $EE_1=EE_2$ (2)



Στο τραπέζιο $\Delta EE_1\Delta_1$ η ΜΖ είναι διάμεσος, οπότε

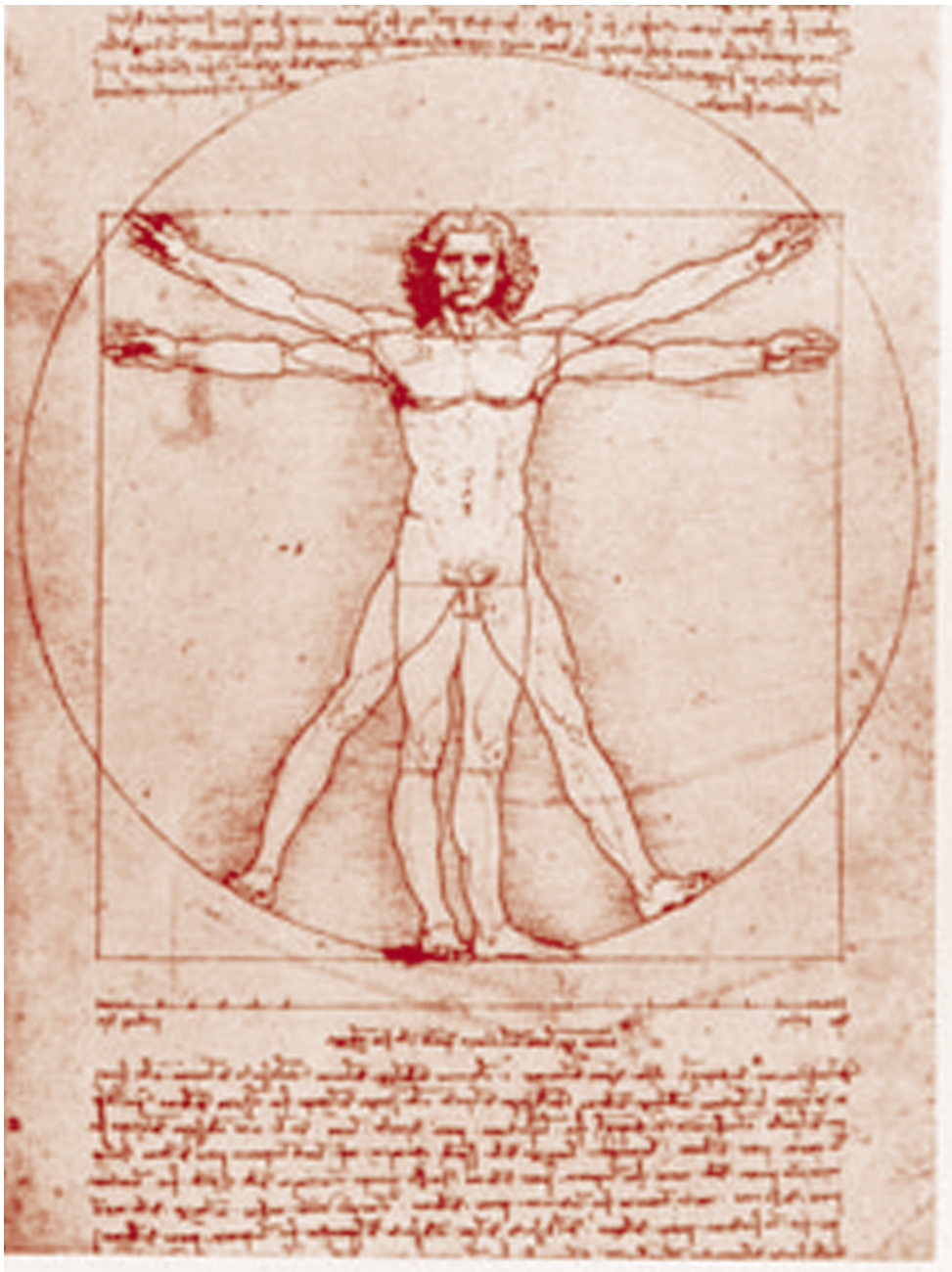
$MZ=\frac{\Delta\Delta_1+EE_1}{2}\overset{(1),(2)}{=}\frac{\Delta\Delta_2+EE_2}{2}=$

$=\frac{\Delta\Delta_2}{2}+\frac{EE_2}{2}=MK+MH$ (στα τρίγωνα $\Delta E\Delta_2$ και ΔEE_2, αφού Μ μέσο ΔΕ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εγγεγραμμένα Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο.
Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.



Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το Architectura de Vitruve, περίπου 1492.

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

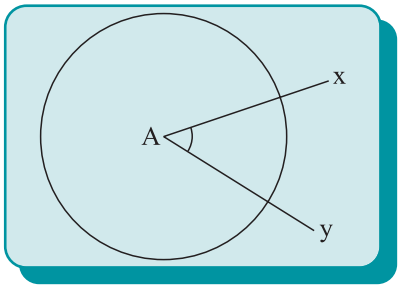
Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (Ο,R). Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:

(i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη § 2.18.

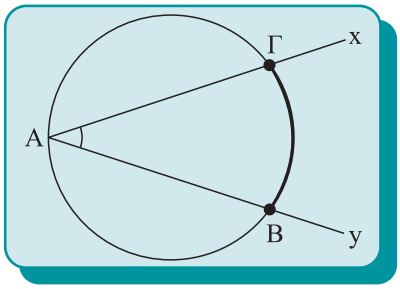
(ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται ***εγγεγραμμένη*** γωνία του κύκλου.

Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

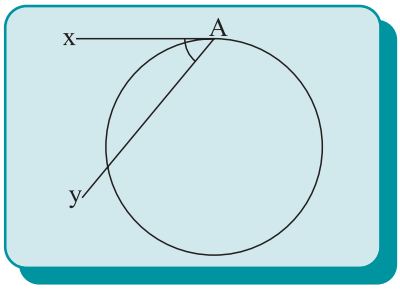
(iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται ***γωνία χορδής και εφαπτομένης.***



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

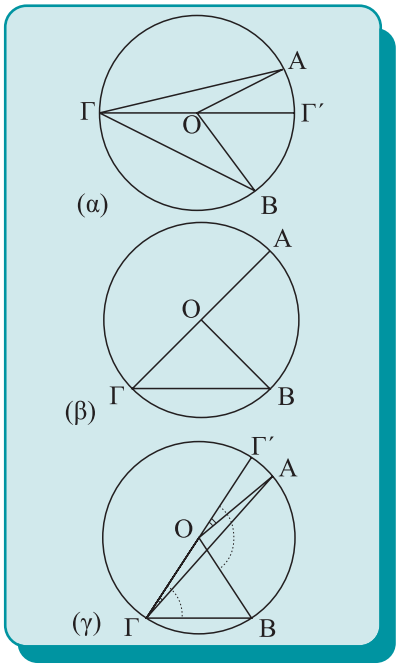
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (Ο,R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{Γ}B$.

(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο Ο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{Γ}B$ (σχ.4α). Έστω Γ΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}Γ = O\hat{Γ}A$. Η $Γ'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $Γ'\hat{O}A = 2O\hat{Γ}A$ και όμοια έχουμε ότι $Γ'\hat{O}B = 2O\hat{Γ}B$.



Σχήμα 4

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

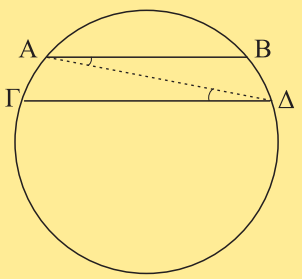
$$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B.$$

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΒ, οπότε $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

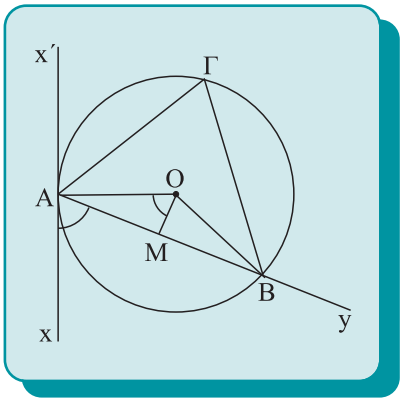
(iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.



Σχήμα 6

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ. 6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.

Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται *γωνία δύο τεμνουσών* και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

(i) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$, όπου η κορυφή της Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Αx, Αy και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,Γ_1 και B_2,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $x\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:

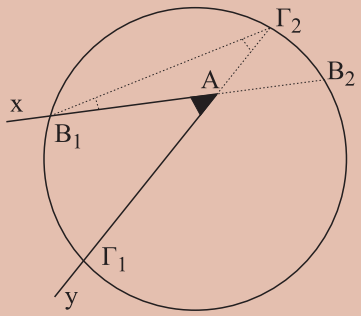
$$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A.$$

(ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$ όπου η κορυφή της Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,B_2 και Γ_1,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $x\hat{A}y$, δηλαδή

$$x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1, \text{ όπου } B_2\hat{B}_1\Gamma_2 > B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1.$$

Απόδειξη

(i) Η $x\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή $x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A$.



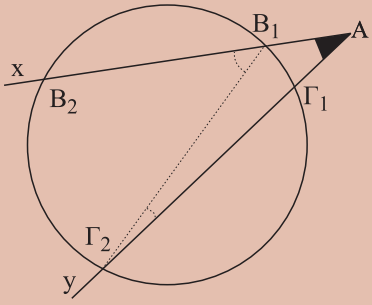
Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2}.$$

(ii) Η γωνία $B_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως

$B_2\hat{B}_1\Gamma_2 = x\hat{A}y + A\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

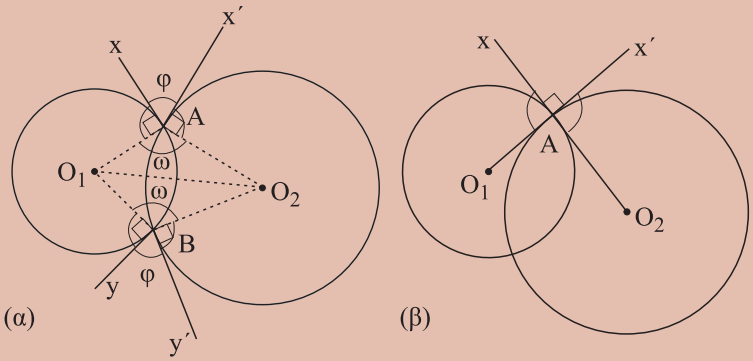
$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2} - \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.
(i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται *γωνία των δύο κύκλων*.
(ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι *οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια* ή ότι είναι *ορθογώνιοι*. Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη

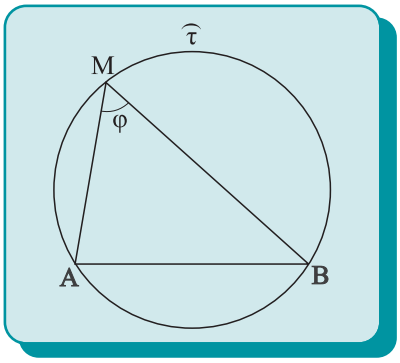
(i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και A,B τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι
$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2 = \omega$ (σχ.9α).



Σχήμα 9

Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο A και στο σημείο B. Οι εφαπτόμενες στο A σχηματίζουν γωνία $x'\hat{A}x = 2\angle - \omega$ (γιατί $O_1\hat{A}x = O_2\hat{A}x' = 1\angle$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο B σχηματίζουν γωνία $y'\hat{B}y = 2\angle - \omega$. Επομένως, $x'\hat{A}x = y'\hat{B}y$.
(ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν $\varphi = 1\angle$ (σχ.9β), έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}x = 2\angle$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο
Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία



Σχήμα 10

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB (σχ.10). Αν φ είναι η γωνία $A\hat{M}B$ τότε λέμε ότι το σημείο M ***βλέπει το τμήμα AB*** υπό γωνία φ ή ισοδύναμα το AB ***φαίνεται*** από το σημείο M υπό γωνία φ. Αν $\overset{\frown}{\tau}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την AB και διέρχεται από το M, τότε λέμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{\tau}$ ***δέχεται γωνία φ***.
Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία φ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

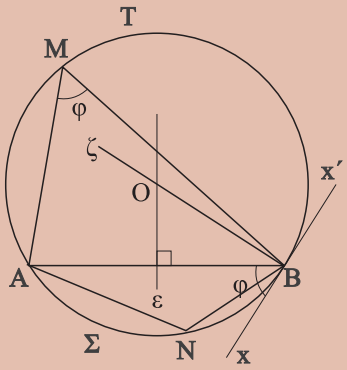
Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και μία γωνία φ. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το ΑΒ και να δέχεται γωνία φ.

• Έστω φ< 1∟

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από ένα σημείο Μ υπό γωνία φ, δηλαδή $A\hat{M}B = \varphi$, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ (βλ. Πόρισμα (iii), § 6.2).

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ ένα τόξο κύκλου, κέντρου Ο, με χορδή την ΑΒ τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του Μ διαφορετικό των Α,Β να ισχύει $A\hat{M}B = \varphi$ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Βx εφαπτόμενη του κύκλου στο Β θα έχουμε $A\hat{B}x = A\hat{M}B = \varphi$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Βx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του Μ, ημιευθεία. Επειδή ΟΒ⊥Βx, το κέντρο Ο θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Βx στο Β. Αλλά το Ο βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ, άρα είναι η τομή των ε και ζ.



Σχήμα 11

Σύνθεση

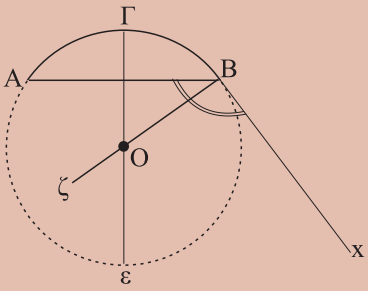
Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα ΑΒ και φέρουμε ημιευθεία Βx έτσι, ώστε $A\hat{B}x = \varphi$. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Βx στο Β, που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ΟΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ έχουμε $A\hat{M}B = A\hat{B}x = \varphi$, αφού η $A\hat{B}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $A\hat{M}B$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο Ν του τόξου $\overset{\frown}{A\Sigma B}$ έχουμε

$$A\hat{N}B = A\hat{B}x' = 2\angle - A\hat{B}x = 2\angle - \varphi,$$

όπου Βx΄ η αντικείμενη ημιευθεία της Βx.



Σχήμα 12

Διερεύνηση

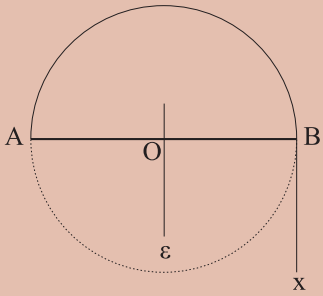
Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε, το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $A\hat{B}x = \varphi \neq 0$.

• Έστω φ>1∟

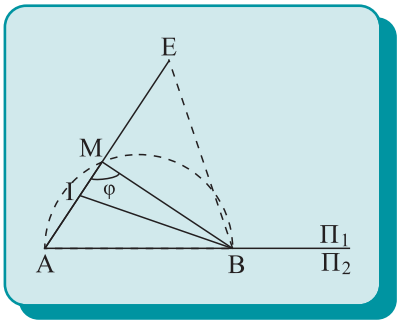
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Ο και το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).

• Έστω φ = 1∟

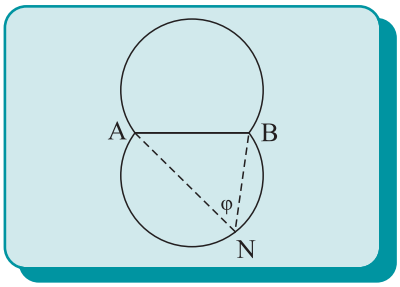
Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο Ο του ΑΒ (σχ.13). Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α και Β.



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που δέχεται γωνία φ και $Π_1$ το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε $A\hat{M}B = φ$, ενώ για κάθε σημείο Ι του τμήματος ΑΜ ή σημείο Ε της προέκτασης του ΑΜ έχουμε αντίστοιχα $A\hat{I}B > φ$ και $A\hat{E}B < φ$.

Άρα τα μοναδικά σημεία του $Π_1$ από τα οποία το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του $\overset{\frown}{AB}$ εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του $Π_2$ που βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ANB}$ συμμετρικού του $\overset{\frown}{AB}$ ως προς την ευθεία ΑΒ (σχ.15).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α,Β, συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ.

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο ΑΒ, χωρίς τα σημεία Α και Β.

ΣΧΟΛΙΟ

*Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της **ανάλυσης**. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§ 3.17).*

*Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως **αναλυτική - συνθετική** μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;*

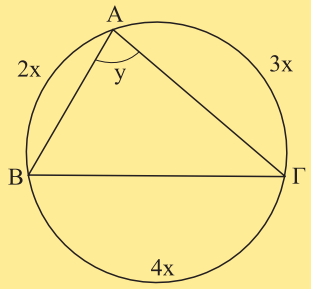
2. *Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:*
α. φ = ω, β. φ = 2ω, γ. ω = 2φ, δ. φ = 90°+ω,
ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

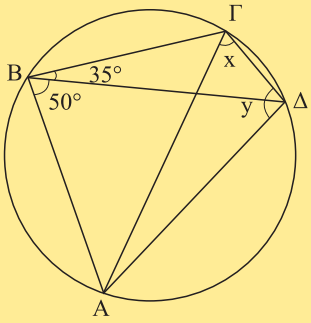
3. *Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση:*
"Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με ....."

4. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία φ < 1∟ ή φ = 1∟;*

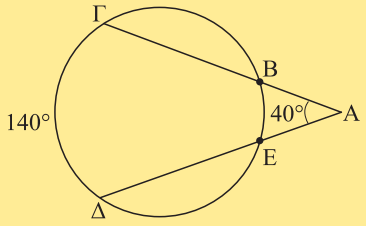
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*

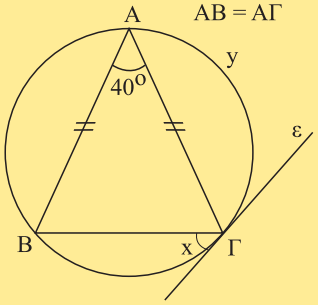


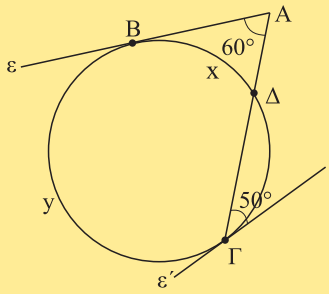


2. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BE}$.*

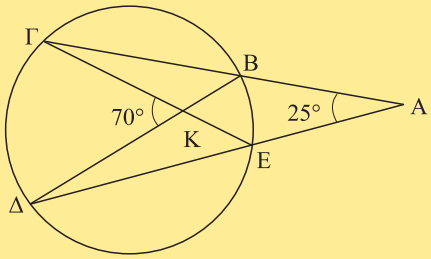


3. *Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε' είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.*

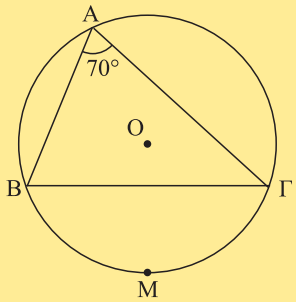




4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25°$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{EB}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$.*

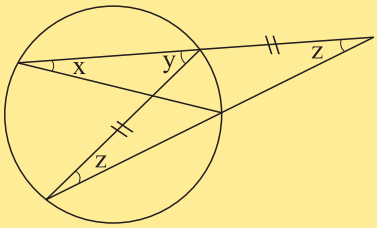


5. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MΓ}$ και $\hat{A} = 70°$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.*

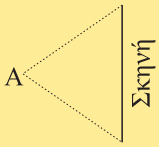


6. *Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;*
i) x – y + z = 0,
ii) x – 2y + z = 0,
iii) x – y + z = 0,

iv) $x + y = 2z$,
v) καμία από τις παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. *Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α .*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

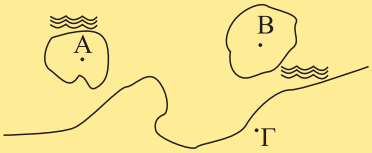
1. *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.*

2. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.*

3. *Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.*

4. *Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ . Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι*

$$A\hat{I}B = 100°,\ B\hat{I}\Gamma = 125°,\ \Gamma\hat{I}A = 135°.$$



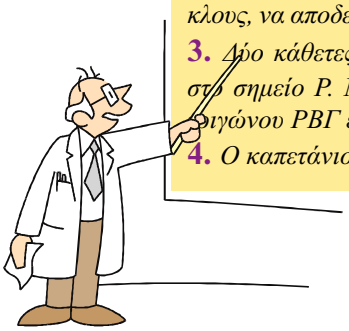
Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'//ΓΓ'.*

2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.*

3. *Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ=ΡΑ.*



Εγγεγραμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγεγραμμένο* σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τετραπλεύρου.

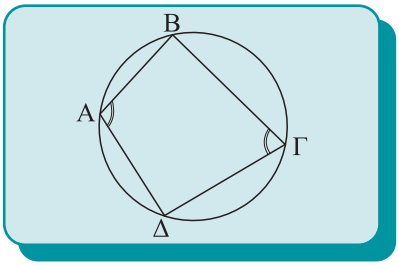
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

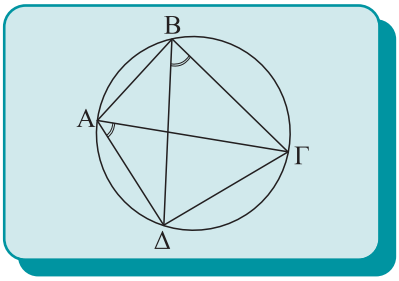
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓΔ}$, ενώ η $\hat{Γ}$ στο $\overset{\frown}{ΒΑΔ}$, με $\overset{\frown}{ΒΓΔ} + \overset{\frown}{ΒΑΔ} = 4∟$ (σχ.16). Επομένως $\hat{A} + \hat{Γ} = 2∟$.

(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($Δ\hat{A}Γ$ και $Δ\hat{B}Γ$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).



Σχήμα 16



Σχήμα 17

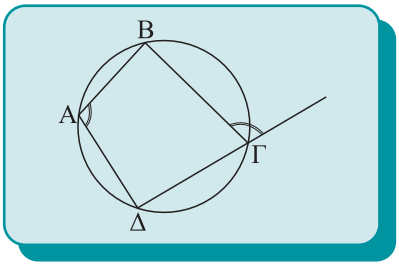
ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγράψιμο* όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.



Σχήμα 18

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές. Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

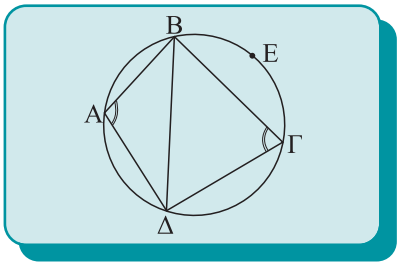
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

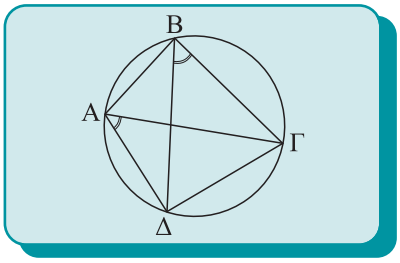
(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

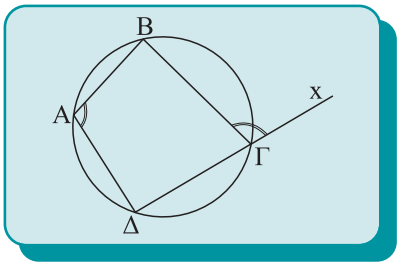
(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{BA\Delta}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{BE\Delta}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{BE\Delta}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

(ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α,Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α,Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η ***Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο σε κύκλο***

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

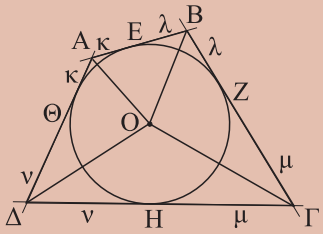
(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις :

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

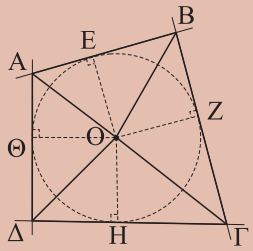
Απόδειξη

(Α) Απλή (βλ. σχ.22).



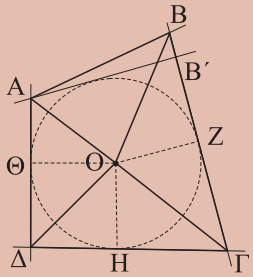
Σχήμα 22

(Β) (i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ. 23). Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ=ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο,ΟΕ) και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 23

(ii) Έστω ότι ΑΒ+ΓΔ = ΑΔ+ΒΓ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο,ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο,ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β΄. Το τετράπλευρο ΑΒ΄ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε



Σχήμα 24

$$AB' + \Gamma\Delta = A\Delta + B'\Gamma \qquad (2).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$AB - AB' = B\Gamma - B'\Gamma \qquad \text{ή} \qquad AB = AB' + BB',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

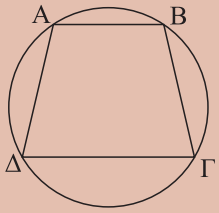
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$.

Επομένως θα είναι και $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, οπότε είναι εγγράψιμο.



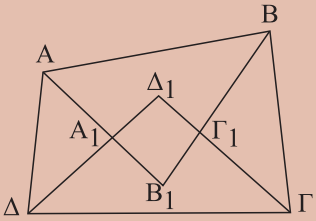
Σχήμα 25

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ. 26). Τότε έχουμε ότι



Σχήμα 26

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 = A\hat{A}_1\Delta = 2\angle - \left(\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = B\hat{\Gamma}_1\Gamma = 2\angle - \left(\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 + \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = 4\angle - \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}\right) = 2\angle,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:*
i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. Σ Λ
ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Σ Λ
Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:*
α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{εξ} = 2\angle$ *β.* $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ *γ.* $\hat{A} = \hat{\Delta}_{εξ}$
δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{εξ}$ *ε.* $\hat{B} = \hat{\Delta}$
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;*

4. *i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;*
ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;*

6. *Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;*

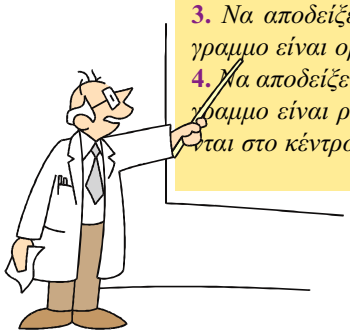
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι* $\hat{A} = 120°$ *και* $\hat{B}_{εξ} = 80°$. *Να βρείτε τις γωνίες* $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ *και* $\hat{\Delta}$ *του τετραπλεύρου.*

2. *Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλο στα Δ και Δ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄.*

2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*

4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΟΑ⊥ΔΕ (Θεώρημα Nagel).*

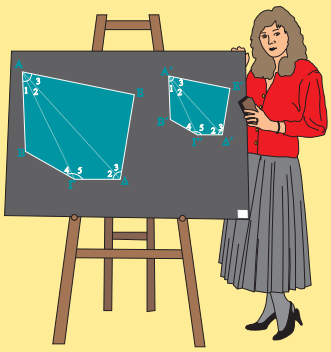
2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (Ο,R) και οι εφαπτόμενες* $ε_1$ *και* $ε_2$ *στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις* $ε_1$ *και* $ε_2$ *στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

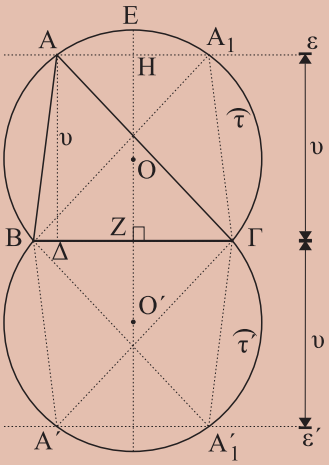
Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ=α, ύψος ΑΔ=υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α,υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$= ω. Επειδή $\hat{A}$= ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

• **Σύνθεση.** Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$ που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε΄//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των T_1, T_2, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$= ω, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\overset{\frown}{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι T_1 και T_2 να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ<ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{\tau}$ σε δύο σημεία Α και A_1 και η ε΄ τέμνει το $\overset{\frown}{\tau}'$ στα Α΄ και A'_1, οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ=ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε΄ έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}'$, το Ε΄ , οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε΄ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ>ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των T_1, T_2 και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

(i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

(ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

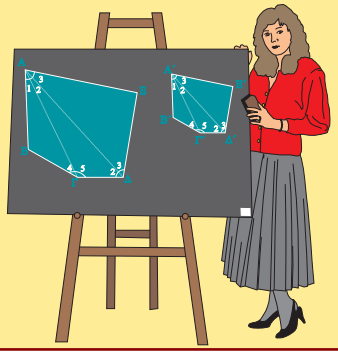
Δραστηριότητες

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή

ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή

iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.



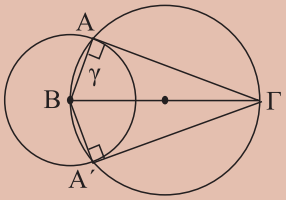
Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ=α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\angle$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:
(i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β,γ), και
(ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\angle$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β,γ).

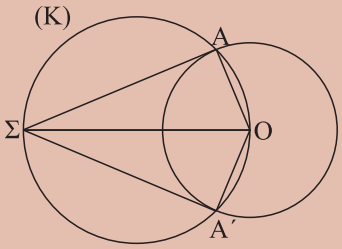
• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν α > γ. Όταν α ≤ γ, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}\Sigma$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο,R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

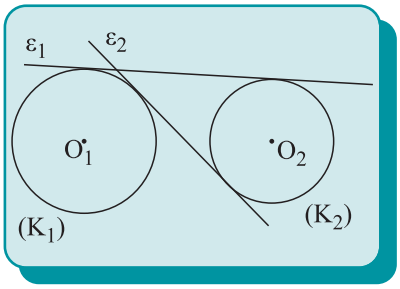
• **Σύνθεση.** Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο,R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

• **Απόδειξη.** Είναι $O\hat{A}\Sigma = O\hat{A}'\Sigma = 1\angle$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο,R).

• **Διερεύνηση.** Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο,R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο,R).

Συμπέρασμα:
Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

• *Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων*



Σχήμα 30

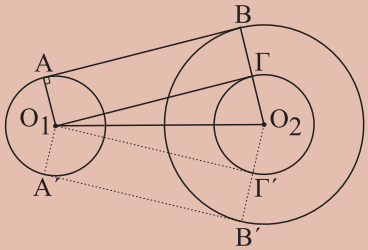
Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται ***κοινή εφαπτομένη*** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως ***εξωτερική***, όπως η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως ***εσωτερική***, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ), (O_2,R) με $R>\rho$ και $O_1O_2>R-\rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒ μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1,ρ), (O_2,R), όπου Α, Β τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma O_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1\Gamma \perp O_2\Gamma$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2\Gamma = O_2B - B\Gamma = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1\Gamma$ στο Γ.



Σχήμα 31

• **Σύνθεση.** Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R-\rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1\Gamma$ και $O_1\Gamma'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2\Gamma$, $O_2\Gamma'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2,R) στα Β, Β′ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1,ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες ΑΒ και Α′Β′ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

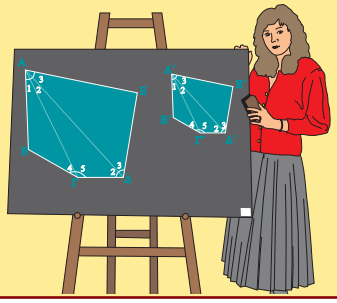
• **Απόδειξη.** Το τετράπλευρο $ΑΒΓΟ_1$ έχει, από την κατασκευή, $Ο_1Α//ΓΒ$ και $ΓΒ = Ο_2Β - Ο_2Γ = R - (R - ρ) = Ο_1Α$, δηλαδή $Ο_1Α=//ΓΒ$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{Γ}$ είναι ορθή, αφού η $Ο_1Γ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(Ο_2, R - ρ)$ το $ΑΒΓΟ_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες $Ο_1Α$ και $Ο_2Β$ είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως η ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η ΑΒ είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α΄Β΄ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

• **Διερεύνηση.** Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $Ο_1Γ$ και $Ο_1Γ'$ από το $Ο_1$ προς τον κύκλο $(Ο_2, R - ρ)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το $Ο_1$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(Ο_2, R - ρ)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $Ο_1Ο_2 > R - ρ$.

Επομένως, όταν $Ο_1Ο_2 > R - ρ$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(Ο_1,ρ)$ και $(Ο_2,R)$.

Δραστηριότητα

Δίνονται δύο κύκλοι $(Ο_1,ρ)$ και $(Ο_2,R)$ με $Ο_1Ο_2 > R + ρ$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που*

i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,
ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,
iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,
iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,
v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,
vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,
vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.

2. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:*

i) δύο κάθετες πλευρές του.	*Σ*	*Λ*
ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα.	*Σ*	*Λ*
iii) μία οξεία γωνία του.	*Σ*	*Λ*
iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του.	*Σ*	*Λ*
v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα.	*Σ*	*Λ*

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:*

i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.

2. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:*

i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,

ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

3. *Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.*

4. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.*

2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.*

3. *Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) κινούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της υποτείνουσας ΒΓ.*

4. *Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) του οποίου δίνονται:*

i) η διάμεσος ΑΜ=μ και μία κάθετη πλευρά.

ii) η διάμεσος ΑΜ=μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

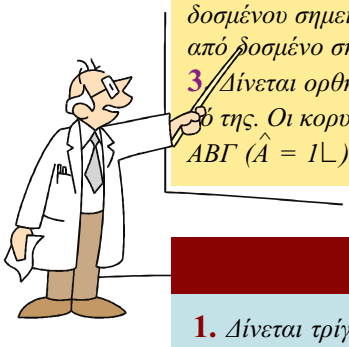
1. *Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.*

2. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:*

i) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $AM = \mu$.

ii) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $BN = \mu$.

3. *Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.*



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β,Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:*

i) τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά,

ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,

iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

2. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.*

3. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B} = \omega$, $\hat{\Gamma} = \varphi$ και την περίμετρό του δ.*

4. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β,Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.*

5. *Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).*

6. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

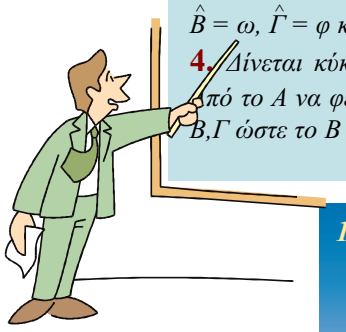
7. *Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

8. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, $ΓH_3$ τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,

ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,

iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3 είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• Εγγεγραμμένη γωνία

i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.
ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

• Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Αν μας ενδιαφέρει γωνία που σχετίζεται με δυο εφαπτόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή εφαπτομένη (εσωτερική ή εξωτερική).
  (**Ασκήσεις:** §6.4 Σύνθετα 1, 2)

- Όμοια, στους τεμνόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή χορδή.
  (**Ασκήσεις:** §6.6 Αποδεικτικές 1)

- Για να διέρχεται ένας κύκλος (Α, Β, Γ) από ένα σημείο Δ αρκεί τα Α, Β, Γ και Δ να είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.
  (**Ασκήσεις:** Γενικές 6, 8)

§ 6.1 - 6.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Για το $1^{ο}$ σχήμα έχουμε: $2x + 3x + 4x = 360° \Leftrightarrow 9x = 360° \Leftrightarrow x = 40°$.
Η y είναι εγγεγραμμένη γωνία και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma} = 4x$ οπότε
$y = 2x = 2 \cdot 40 = 80°$.

Για το $2^{ο}$ σχήμα έχουμε $x = A\hat{B}\Delta = 50°$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.
Για τον ίδιο λόγο $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = 35°$ οπότε από το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ βρίσκουμε:
$y = 180° - x - 35° = 105°$.

2. Η γωνία $\hat{A}$ είναι γωνία τεμνουσών οπότε (§ 6.3) έχουμε:
$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow 40° = \frac{1}{2}(200° - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 120°$.

3. Για το $1^{ο}$ σχήμα έχουμε: $x = \hat{A} = 40°$, γιατί η x είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης. Τότε $\overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$. Επειδή $AB = A\Gamma$ θα είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = y$ οπότε από την: $2y + \overset{\frown}{B\Gamma} = 360° \Leftrightarrow 2y + 80° = 360° \Leftrightarrow y = 140°$. Για το $2^{ο}$ σχήμα έχουμε: Η $\hat{A}$ είναι γωνία τέμνουσας και εφαπτομένης, επομένως σύμφωνα με την § 6.3 θα είναι: $\hat{A} = \frac{1}{2}(y - x) \Leftrightarrow y - x = 120° (1)$. Για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{(\overset{\frown}{\Gamma\Delta})}{2} = \frac{1}{2}(360° - x - y) \Leftrightarrow 50° = \frac{1}{2}(360° - x - y) \Leftrightarrow x + y = 260° (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $x = 70°$, $y = 190°$.

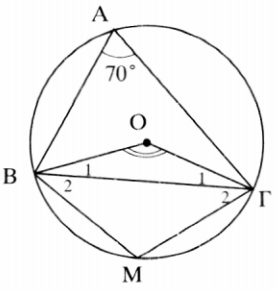
4. Από το σχήμα έχουμε:
$\hat{K} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow 70° = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE} = 140° (1)$.

Επίσης: $\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma} - \overset{\frown}{BE} = 50° (2)$. Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 95°$, $\overset{\frown}{BE} = 45°$.

5. Έχουμε: $\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}$ ή $70° = \frac{1}{2}\hat{O}$ ή. $\hat{O} = 140^{o}$.

Επειδή $OB = O\Gamma$ είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = x$ οπότε

$2x + \hat{O} = 180^\circ$ ή $x = 20^\circ$ δηλ. $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 20^\circ$ Επειδή $\hat{A} = 70^\circ$ θα είναι $\overset{\frown}{BM\Gamma} = 140^\circ$ και αφού M μέσο $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{M\Gamma} = 70^\circ$ οπότε $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}70^\circ = 35^\circ$ και από το τρίγωνο ΒΜΓ βρίσκουμε ότι $\hat{M} = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.

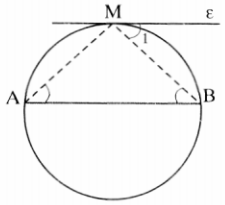


6. Από το σχήμα έχουμε $y = 2z$ (y εξωτερική γωνία τριγώνου)και $x = z$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Με τη βοήθεια αυτών η i) είναι σωστή.

7. Τα ζητούμενα καθίσματα είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στο τόξο που γράφεται με χορδή το τμήμα που εκφράζει το πλάτος της σκηνής και δέχεται γωνία ίση με τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η σκηνή από το κάθισμα Α.

Αποδεικτικές ασκήσεις

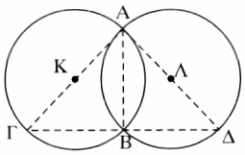
1. **Ευθύ**: Έστω M το μέσο ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και ε η εφαπτομένη του στο M. Θα δείξουμε ότι $\varepsilon // AB$. Έχουμε: η $\hat{M}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, άρα: $\hat{A} = \hat{M}_1 (1)$. Εξ' άλλου αφού M μέσο AB θα είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ οπότε $\hat{A} = \hat{B} (2)$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{MB}$ και $\overset{\frown}{MA}$ αντίστοιχα. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{M}_1$ απ' όπου έχουμε ε//ΑΒ.



Αντίστροφο: Υποθέτουμε τώρα ότι $\varepsilon // AB$ και θα δείξουμε ότι M μέσο $\overset{\frown}{AB}$.
Έχουμε $\hat{A} = \hat{M}_1 (3)$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{B} = \hat{M}_1 (4)$ (γιατί $\varepsilon // AB$).

Από (3), (4) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B}$ οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών $\overset{\frown}{MB}$, $\overset{\frown}{MA}$ είναι ίσα δηλ. M μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.

2. Επειδή Γ αντιδιαμετρικό του Α στον κύκλο κέντρου Κ, η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή γιατί βαίνει σε ημικύκλιο, δηλ. $A\hat{B}\Gamma = 90^o (1)$ όμοια $A\hat{B}\Delta = 90^o$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 180^o$ η οποία σημαίνει ότι Γ, Β, Δ συνευθειακά δηλαδή η ΓΔ διέρχεται από το Β.



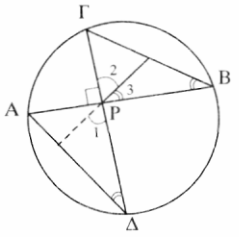
3. Αρκεί $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = 90°$. Έχουμε:

$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (ως κατακορυφήν)

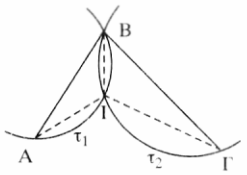
$\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο) και

$\hat{B} = \hat{P}_3$ (γιατί το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ορθογώνιο στο Ρ και ΡΜ διάμεσος)

Άρα $\hat{P}_1 + \Delta = \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = B\hat{P}\Gamma = 90°$, αφού οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα.



4. Επειδή $A\hat{I}B = 100°$ το Ι βρίσκεται σε τόξο τ_1 που γράφεται με χορδή ΑΒ και δέχεται γωνία $100°$. Όμοια το Ι βρίσκεται και στο τόξο τ_2 που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία $125°$. Τα τόξα αυτά έχουν κοινό το σημείο Β που δε βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο των αντίστοιχων κύκλων, επομένως θα έχουν και δεύτερο κοινό σημείο Ι το οποίο είναι το ζητούμενο. Πράγματι $A\hat{I}B = 100°$ από κατασκευή του τ_1 και $B\hat{I}\Gamma = 125°$ από κατασκευή του τ_2 και $A\hat{I}\Gamma = 360° - 100° - 125° = 135°$.



Σχόλιο: Προφανώς ο καπετάνιος έκαμε και μια περιττή μέτρηση.

Σύνθετα θέματα

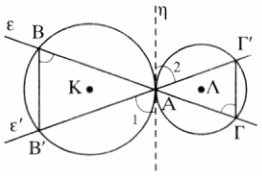
1. Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε τη **κοινή εσωτερική εφαπτομένη** n αυτών στο Α. Τότε:

$\hat{B} = \hat{A}_1$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Κ)

$\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Λ)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ως κατα κορυφήν)

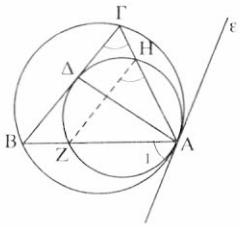
Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι ΒΒ΄//ΓΓ΄



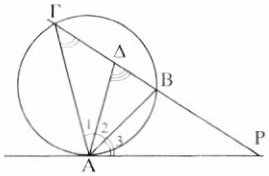
Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Τότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, φέρνουμε τη **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** και έχουμε:

$\hat{B} = \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ (χορδή και εφαπτομένη) οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα ΒΒ΄//ΓΓ΄.

2. Έστω Ζ, Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με το μικρότερο κύκλο. Για να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{A}H$ και επειδή αυτή είναι εγγεγραμμένη στο μικρό κύκλο αρκεί να δείξουμε ότι τόξο ΖΔ είναι ίσο με το ΔΗ, το οποίο σύμφωνα με την άσκηση 1 είναι ισοδύναμο με την ΒΓ//ΖΗ το οποίο είναι με τη σειρά του ισοδύναμο με την $\hat{\Gamma} = \hat{H}$ που ισχύει γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ και $\hat{H} = \hat{A}_1$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης όπου ε η **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** των δύο κύκλων στο Α.



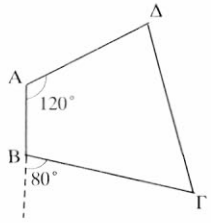
3. Για να δείξουμε ότι ΡΑ=ΓΔ αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}P$ ισούται με την γωνία $\Delta\hat{A}P$. Έχουμε: η γωνία $A\hat{\Delta}P$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ οπότε: $A\hat{\Delta}P = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1$ (1). Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{A}_3$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. Με αντικατάσταση των $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_1$ με τα ίσα τους στην (1) παίρνουμε: $A\hat{\Delta}P = \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = \Delta\hat{A}P$ δηλ. $A\hat{\Delta}P = \Delta\hat{A}P$ που είναι το ζητούμενο.



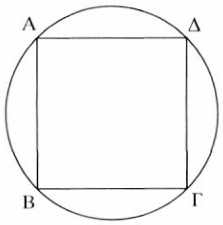
§ 6.5 □ 6.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

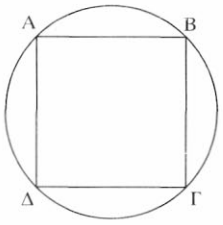
1. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο έχουμε:
$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $120^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
Επίσης έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{B}_{\varepsilon\xi}$ ή $\hat{\Delta} = 80^\circ$.
Προφανώς δε $\hat{B} = 180^\circ - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ$.



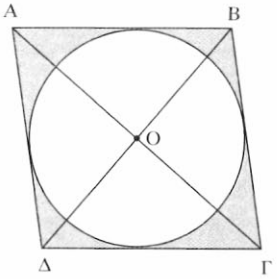
2. Επειδή ΑΒΓΔ ρόμβος θα είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}(1)$. Αλλά ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι και εγγεγραμμένος σε κύκλο, οπότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ (2)$. Από τις (1), (2) προκύπτει $2\hat{A} = 180^\circ$ ή $\hat{A} = 90^\circ$. Δηλαδή ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.



3. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}, \hat{B} = \hat{\Delta}$. Αφού είναι και εγγεγραμμένο, οι απέναντι γωνίες είναι και παραπληρωματικές, συνεπώς $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 1\angle$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = 1\angle$.



4. i) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΒ=ΓΔ και ΒΓ=ΔΑ. Επειδή είναι περιγράψιμο θα έχουμε ότι: ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ ή 2ΑΒ=2ΒΓ ή ΑΒ=ΒΓ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
ii) Αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος οι διαγώνιοί του διχοτόμουν τις γωνίες του, επομένως τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.



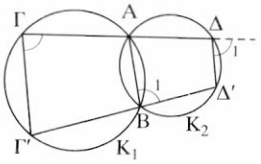
Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$. Γι' αυτό φέρνουμε τη **κοινή χορδή** ΑΒ οπότε από τα σχηματιζόμενα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΒΓ΄Γ και ΑΒΔ΄Δ έχουμε:

$\hat{\Gamma} = \hat{B}_1$ ($\hat{B}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΓ΄Γ)

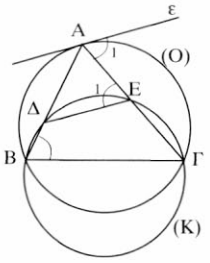
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ ($\hat{\Delta}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΔ΄Δ).

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$ δηλ. το ζητούμενο.

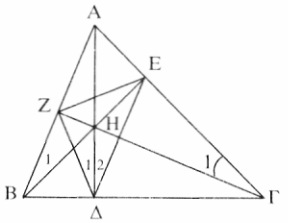


2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$.

Έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{B}(1)$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) στον κύκλο (Ο) και $\hat{E}_1 = \hat{B}(2)$ γιατί το ΒΔΕΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ). Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ το οποίο σημαίνει ότι ε//ΔΕ.

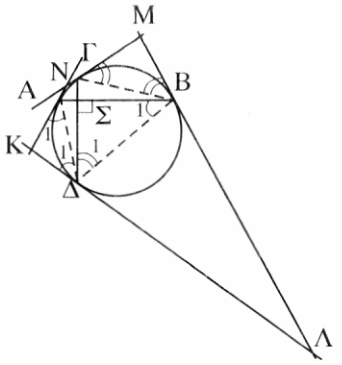


3. Είναι $B\hat{\Delta}H + B\hat{Z}H = 90°+90° = 180°$ οπότε το ΒΔΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 (1)$. Αλλά και το ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, γιατί $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90°$ οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 (2)$. Όμως και το ΔΗΕΓ είναι κι αυτό εγγράψιμο,αφού $H\hat{\Delta}\Gamma + H\hat{E}\Gamma = 90°+90° = 180°$ οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_2 (3)$.



Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ δηλ. ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ του τριγώνου ΔΕΖ. Όμοια αποδεικνύεται και για τα άλλα ύψη.

4. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180°$.
Είναι $KA = K\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Κ προς τον κύκλο και επομένως $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ οπότε από το τρίγωνο ΚΑΔ έχουμε $\hat{K} = 180°-2\hat{\omega}$. Όμως $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης οπότε $\hat{K} = 180°-2\hat{B}_1 (1)$.



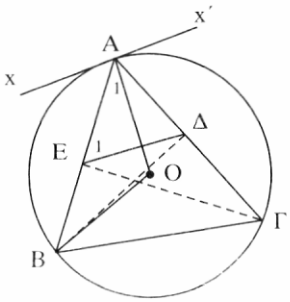
Όμοια βρίσκουμε ότι $\hat{M} = 180°-2\hat{\Delta}_1 (2)$

Επειδή όμως $AB \perp \Gamma\Delta$ είναι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90° (3)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 360°-2(\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1)$ οπότε παίρνοντας υπόψη και την (3) προκύπτει ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180°$ που σημαίνει ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Σύνθετα θέματα

1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90°$. Γι' αυτό φέρνουμε την ΟΒ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ βρίσκουμε: $2\hat{A}_1 + \hat{O} = 180°$ και επειδή $\hat{O} = 2\hat{\Gamma}$, αφού $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη και $\hat{O}$ επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο, παίρνουμε $2\hat{A}_1 + 2\hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90° (1)$. Επειδή όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90°$ το ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο στον οποίο η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική

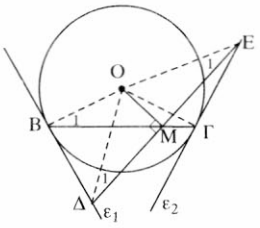


[illegible] $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90$.

2ος τρόπος: Φέρνουμε την εφαπτομένη xx΄ στο Α, οπότε ΟΑ⊥xx΄. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΕ//xx΄. Πράγματι $x\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ (χορδή και εφαπτομένη) και $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε $x\hat{A}B = \hat{E}_1$.

Άρα ΔΕ//xx΄.

2. Φέρνουμε τα τμήματα ΟΔ και ΟΕ. Στο τρίγωνο ΟΔΕ το ΟΜ είναι ύψος, από κατασκευή οπότε για να είναι ΔΜ = ΜΕ πρέπει το τρίγωνο ΟΔΕ να είναι ισοσκελές δηλ. πρέπει $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Επειδή ε_1 εφαπτομένη και ΟΒ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής έχουμε: $O\hat{B}\Delta = 90°$. Επίσης και $O\hat{M}\Delta = 90°$ οπότε το ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (1)

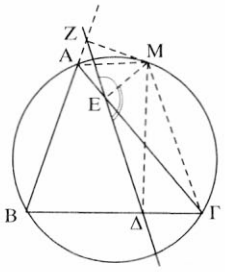


Επίσης από $O\hat{M}E = O\hat{\Gamma}E = 90°$ προκύπτει ότι ΟΜΓΕ εγγράψιμο οπότε $E_1 = \hat{\Gamma}_1$ (2).

Αλλά ΟΒ = ΟΓ συνεπάγεται ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (3).

Από (1), (2) με τη βοήθεια της (3) βρίσκουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ που είναι το ζητούμενο.

3. Έστω Δ, Ε, Ζ οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ πάνω στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $Z\hat{E}M + M\hat{E}\Delta = 180°$.



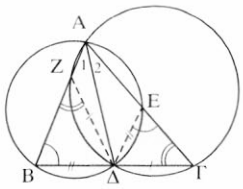
Επειδή $M\hat{Z}A + M\hat{E}A = 90°+90° = 180°$ το ΜΖΑΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $M\hat{E}Z = M\hat{A}Z$(1).

Επίσης από $M\hat{E}\Gamma = M\hat{\Delta}\Gamma = 90°$ προκύπτει ότι ΜΕΔΓ εγγράψιμο και επομένως $M\hat{E}\Delta + M\hat{\Gamma}\Delta = 180°$ (2)

Αλλά, αφού ΑΒΓΜ εγγεγραμμένο, θα είναι $M\hat{A}Z = M\hat{\Gamma}\Delta$(3)

Από (1) και (3) προκύπτει ότι $M\hat{E}Z = M\hat{\Gamma}\Delta$ οπότε αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε ότι $M\hat{E}\Delta + M\hat{E}Z = 180°$ η οποία σημαίνει ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

4. Η γωνία $Z\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον (Α,Δ,Γ) κύκλο και η ΑΔ είναι διχ**οτόμος** της, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ή $\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ οπότε και $Z\Delta = \Delta\Gamma(1)$.



Όμοια η ΑΔ είναι διχοτόμος και της $B\hat{A}E$ που είναι εγγεγραμμένη στον (Α,Δ,Β) κύκλο, οπότε $\Delta E = B\Delta(2)$

Επειδή το ΑΒΔΕ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο θα είναι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma(3)$. Επίσης και το ΑΖΔΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οπότε $B\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma(4)$. Από (3) και (4) προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}Z$ από την οποία με τη βοήθεια και των (1), (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα.

§ 6.7

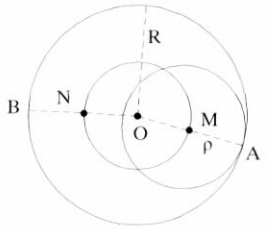
Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) Επειδή ο δρομέας κινείται ισαπέχοντας από τις πλευρές του διαδρόμου, ο γεωμ. τόπος των θέσεών του είναι η μεσοπαράλληλη των πλευρών του διαδρόμου.

ii) Είναι ένας κύκλος ομόκεντρος της γης και ακτίνας R+10 όπου R η ακτίνα της γης σε Km.

2. i) **Ευθύ**: Έστω (Μ,ρ) ο κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που κυλιέται στο εσωτερικό του γνωστού κύκλου (Ο,R) και Α το μετακινούμενο μοναδικό κοινό σημείο των δύο κύκλων. Τότε ΟΜ=ΟΑ-ΜΑ=R-ρ δηλ. το τυχαίο σημείο Μ του τόπου απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Ο, άρα βρίσκεται στον κύκλο $(O, R-\rho)$

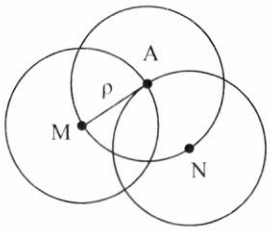
Αντίστροφο. Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου $(O, R-\rho)$ και Β το κοινό σημείο της προέκτασης της ΟΝ με τον (Ο,R).



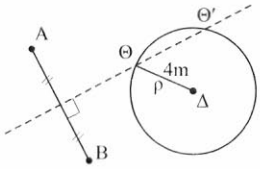
Τότε $NB = OB - ON = R - (R-\rho) = \rho$ οπότε το Β είναι σημείο του κύκλου (N, ρ). Επειδή δε το Β είναι σημείο της διακέντρου των (Ο,R) και (Ν,ρ) το Β είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δυο κύκλων. Άρα το Ν είναι κέντρο κύκλου ακτίνας ρ που εφάπτεται στον (Ο,R) εσωτερικά. Επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι ο κύκλος $(O, R-\rho)$.

ii) **Ευθύ:** Έστω (Μ,ρ) ένας κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που διέρχεται από το σταθερό σημείο Α. τότε ΑΜ=ρ που σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στον κύκλο (Α,ρ).

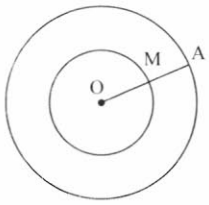
Αντίστροφο. Έστω Ν τυχαίο σημείο του κύκλου (Α,ρ). Τότε ΝΑ=ρ οπότε το Ν είναι το κέντρο κύκλου που διέρχεται από το Α και έχει ακτίνα ρ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος (Α,ρ) .



3. Έστω Θ η θέση του θησαυρού. Επειδή ΘΑ=ΘΒ το Θ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του τμήματος ΑΒ με άκρα τις θέσεις των δένδρων. Εξάλλου αφού το Θ απέχει από το δέντρο Δ απόσταση 4m θα βρίσκεται και στον κύκλο (Δ,4m). Άρα η ζητούμενη θέση του θησαυρού θα είναι στα κοινά σημεία της ε με τον κύκλο (Δ,4m).

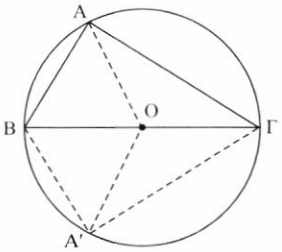


4. Αν R είναι η ακτίνα του δοθέντος κύκλου, είναι φανερό ότι ο γεωμ. τόπος των μέσων Μ της ακτίνας ΟΑ, καθώς το Α κινείται πάνω στον (Ο,R), είναι ο κύκλος $(O,\frac{R}{2})$.



Αποδεικτικές ασκήσεις

1. **Ευθύ**: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με σταθερή υποτείνουσα ΒΓ=α. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΟ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε $AO = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$ η οποια σημαίνει ότι το μεταβλητό σημείο Α απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση $\frac{\alpha}{2}$, άρα το Α βρίσκεται στον κύκλο $(O,\frac{\alpha}{2})$.

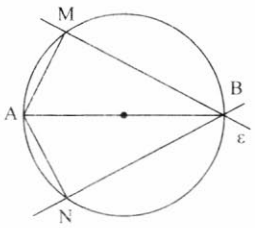


Αντίστροφο: Γράφουμε τον κύκλο $(O,\frac{\alpha}{2})$ και έστω Α΄ ένα σημείο του, διαφορετικό των Β,Γ. Τότε τα Α΄, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν επομένως τρίγωνο. Το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο στο Α΄, αφού για τη διάμεσο Α΄Ο ισχύει: $A'O = \frac{\alpha}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα κάθε σημείο του κύκλου $(O,\frac{\alpha}{2})$, διαφορετικό των άκρων Β, Γ της σταθερής διαμέτρου ΒΓ αυτού είναι κορυφή της ορθής γωνίας Α του μεταβλητού τριγώνου ΑΒΓ.

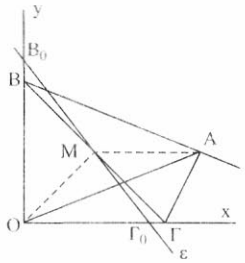
Επομένως γεωμ. τόπος του Α είναι ο κύκλος $(O,\frac{\alpha}{2})$ χωρίς τα σημεία του Β, Γ.

2. **Ευθύ:** Έστω ε μια ευθεία που διέρχεται από το Β και Μ η προβολή του Α πάνω στην ε. Τότε $A\hat{M}B = 1\angle$ οπότε το Μ βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο το ΑΒ.

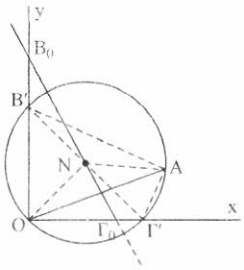


Αντίστροφο: Γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ και θεωρούμε ένα σημείο Ν αυτού, διαφορετικό των Α, Β. Τότε $A\hat{N}B = 1\angle$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) και επομένως το Ν είναι προβολή του Α πάνω στην ευθεία ΝΒ, που διέρχεται από το Β. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε σημείο του κύκλου διαμέτρου ΑΒ, διαφορετικό των Α, Β είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου. Όμως στο γεωμ. τόπο ανήκουν και τα Α, Β γιατί το μεν Α είναι προβολή του εαυτού του πάνω στην ΑΒ, ενώ το Β είναι προβολή του Α πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ΑΒ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

3. **Ευθύ:** Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ του προβλήματος. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ η ΟΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, επομένως $OM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1). Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ΟΜ=ΜΑ το οποίο σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ.



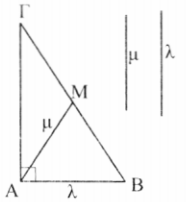
Αντίστροφο: Φέρνουμε τη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ν της ε. Γράφουμε τον κύκλο (Ν,ΝΟ), ο οποίος τέμνει τις Oy,Ox στα σημεία Β΄,Γ΄ αντίστοιχα. Επειδή $B'\hat{O}\Gamma' = 90°$ το Β΄Γ΄ είναι διάμετρος του κύκλου (Ν,ΝΟ) και επομένως διέρχεται από το κέντρο Ν οπότε θα είναι $B'N = N\Gamma'$ δηλαδή το Ν είναι μέσο του Β΄Γ΄.



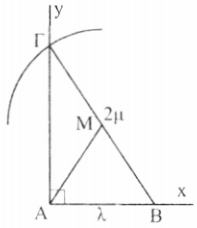
Άρα θα έχουμε $NA = NO = \frac{B'\Gamma'}{2}$ (γιατί το ΟΝ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒ΄Γ΄). Έτσι για τη διάμεσο ΝΑ του τριγώνου ΑΒ΄Γ΄ έχουμε

$NA = \frac{B'\Gamma'}{2}$ το οποίο σημαίνει ότι $B'\hat{A}\Gamma' = 90°$. Όμως το Ν είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας, άρα γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα $B_0\Gamma_0$ της μεσοκαθέτου ε που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας, συμπεριλαμβανομένων και των άκρων B_0, Γ_0.

4. i) **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $\hat{A} = 1\angle$, ΑΒ=λ και διάμεσο ΑΜ=μ. Τότε $B\Gamma = 2AM = 2\mu$, οπότε έχουμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο από την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά.



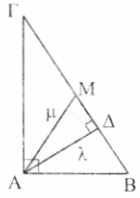
Σύνθεση. Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$, στην Ax παίρνουμε σημείο Β ώστε ΑΒ=λ και γράφουμε τον κύκλο (Β,2μ), ο οποίος τέμνει την ημιευθεία Ay στο Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει: $\hat{A} = x\hat{A}y = 1\angle$, από κατασκευή της $x\hat{A}y$, ΑΒ=λ από κατασκευή και διάμεσο $AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$ δηλαδή τα δοθέντα στοιχεία.

Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος (Β,2μ) να τέμνει την Ay, το οποίο συμβαίνει όταν λ<2μ.

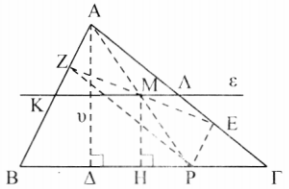
ii) Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: $\hat{A} = 1\angle$, διάμεσο ΑΜ=μ και ύψος ΑΔ=λ.



Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΜ ($\hat{\Delta} = 1\angle$)κατασκευάζεται γιατί έχει γνωστή υποτείνουσα ΑΜ=μ και μια κάθετη πλευρά ΑΔ=λ. Έτσι για τη σύνθεση, κατασκευάζουμε πρώτα το ΔΑΜ και παίρνουμε την προέκταση της ΜΔ και εκατέρωθεν του Μ τα σημεία Β, Γ ώστε $MB = M\Gamma = \mu$. Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο. Για να υπάρχει λύση πρέπει να κατασκευάζεται το τρίγωνο ΔΑΜ το οποίο συμβαίνει όταν λ<μ.

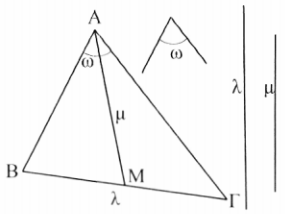
Σύνθετα θέματα

1. Από τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ. Ζητάμε το γεωμ. τόπο του μέσου Μ του ΖΕ. Το ΑΖΡΕ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιες ΑΡ και ΖΕ διχοτομούνται άρα το Μ είναι και μέσο του ΑΡ. Φέρνουμε το ύψος $\text{ΑΔ} = \upsilon$ και $\text{ΜΗ}\perp\text{ΒΓ}$. Στο τρίγωνο ΑΔΡ είναι ΜΗ//ΑΔ και Μ μέσο της πλευράς ΑΡ οπότε $\text{ΜΗ} = \frac{\text{ΑΔ}}{2}$ ή $\text{ΜΗ} = \frac{\upsilon}{2}$, η οποία σημαίνει ότι το Μ απέχει σταθερή απόσταση $\frac{\upsilon}{2}$ από τη σταθερή ευθεία ΒΓ και επομένως βρίσκεται σε ευθεία ε//ΒΓ που απέχει $\frac{\upsilon}{2}$ από τη ΒΓ. Επειδή το Ρ είναι σημείο του τμήματος ΒΓ το Μ είναι σημείο του τμήματος ΚΛ.

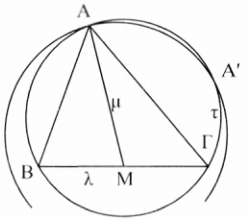


Αντίστροφο: Έστω Μ σημείο του ΚΛ και Ρ η τομή της ΑΜ με τη ΒΓ. Από το Ρ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ οπότε στο παραλληλόγραμμο ΑΖΡΕ το Μ είναι μέσο της μιας διαγωνίου ΑΡ και επομένως θα είναι και μέσο της άλλης διαγωνίου ΖΕ. Άρα κάθε σημείο Μ του τμήματος ΚΛ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου και επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα ΚΛ.

2. i) **Ανάλυση:** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: ΒΓ=λ, $\hat{\text{Α}} = \omega$ και διάμεσο ΑΜ=μ. Επειδή $\hat{\text{Α}} = \omega$ το Α βλέπει το σταθερό τμήμα ΒΓ=λ υπό σταθερή γωνία, άρα θα είναι σημείο του τόξου τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία $\hat{\omega}$. Επίσης, αφού ΑΜ=μ το Α απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Μ, άρα θα είναι σημείο του κύκλου (Μ,μ). Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου (Μ,μ).



Σύνθεση: Παίρνουμε τμήμα ΒΓ=λ και με χορδή αυτό γράφουμε το τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Επίσης παίρνουμε το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ και γράφουμε τον κύκλο (Μ,μ) ο οποίος τέμνει το τόξο τ. Αν Α είναι ένα σημείο τομής, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.



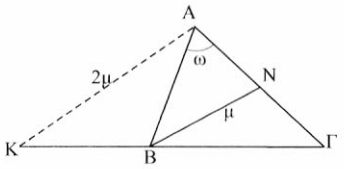
Απόδειξη: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΒΓ=λ, από κατασκευή, $\hat{\text{Α}} = \omega$ γιατί είναι εγγεγραμμένη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο ΑΜ=μ, ως ακτίνα του κύκλου (Μ,μ).

Διερεύνηση: Για να υπάρχει λύση πρέπει ο κύκλος (Μ,μ) να έχει κοινά σημεία με το τόξο τ. Αν υπάρχει και δεύτερο κοινό σημείο Α΄ τότε το τρίγωνο ΑΒ΄Γ είναι ίσο με το

6.7

τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε δεν έχουμε δεύτερη λύση. Αν θεωρήσουμε και το τόξο τ΄ του αντικειμένου ημιεπιπέδου ως προς την ΒΓ τότε τα τρίγωνα που προκύπτουν είναι πάλι ίσα με το τρίγωνο ΑΒΓ.

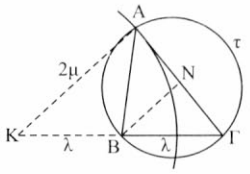
ii) **Ανάλυση:** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: ΒΓ=λ, $\hat{A} = \omega$ και διάμεσο ΒΝ=μ. Από το Α φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΝ, που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Κ. Τότε στο τρίγωνο ΑΚΓ Ν μέσο της ΑΓ και ΝΒ//ΑΚ οπότε Β μέσο ΚΓ και ΑΚ=2ΒΝ=2μ.



Επειδή ΚΒ=ΒΓ το σημείο Κ είναι ένα σταθερό σημείο και αφού ΚΑ=2μ=σταθερό το Α είναι σημείο του κύκλου (Κ,2μ). Επίσης αφού $\hat{A} = \omega$ το Α βρίσκεται σε τόξο τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία ω. Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου (Κ,2μ).

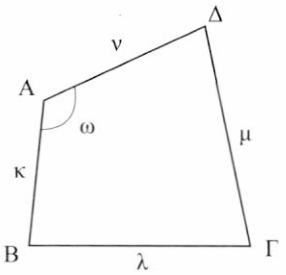
Σύνθεση: Παίρνουμε τμήμα ΒΓ=λ και στην προέκταση της ΓΒ σημείο Κ έτσι ώστεΚΒ=ΒΓ. Γράφουμε τον κύκλο (Κ,2μ). Στη συνέχεια με χορδή το ΒΓ γράφουμε τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Αν Α είναι το σημείο τομής του τ με τον (Κ,2μ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει: ΒΓ=λ, από κατασκευή, $\hat{A} = \omega$, γιατί είναι εγγεγραμμέννη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο $BN = \frac{KA}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$

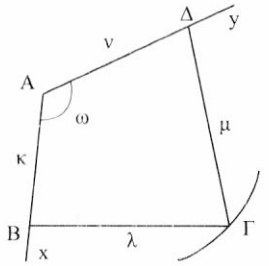


Διερεύνηση: Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος (Κ,2μ) να τέμνει το τόξο τ και προφανώς $0 < \omega < 180°$.

3. **Ανάλυση:** Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο που έχει ΑΒ=κ,ΒΓ=λ, ΓΔ=μ, ΔΑ=ν , και $\hat{A} = \omega$. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΔ γνωρίζουμε δυο πλευρές του και την περιεχόμενη γωνία, επομένως αυτό κατασκευάζεται. Έτσι προσδιορίζονται οι τρεις κορυφές Α, Β και Δ του τετραπλεύρου. Η κορυφή Γ πλέον είναι η τομή των κύκλων (Β,λ) και (Δ,μ).



Σύνθεση: Με κορυφή τυχαίο σημείο Α κατασκευάζουμε γωνία $x\hat{A}y = \omega$ και στις πλευρές της παίρνουμε τα τμήματα ΑΒ=κ και ΑΔ=ν.
Στη συνέχεια γράφουμε τους κύκλους (Β,λ) και (Δ,μ) που τέμνονται στο Γ. Το ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο.
Απόδειξη: Από κατασκευή έχει ΑΒ=κ, ΑΔ=ν και $\hat{A} = \omega$. Επίσης ΒΓ=λ, ως ακτίνα του (Β,λ) και ΔΓ=μ ως ακτίνα του (Δ,μ).
Διερεύνηση: Πρέπει $0 < \omega < 180°$ και οι κύκλοι (Β.λ) και (Δ,μ) να τέμνονται.



Γενικές Ασκήσεις

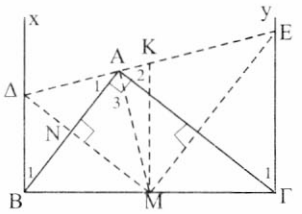
1. α) Επειδή ΜΔ//ΑΓ, ως κάθετες στην ΑΒ και Μ μέσο ΒΓ θα είναι και Ν μέσο ΑΒ οπότε ΜΔ μεσοκάθετος ΑΒ και επομένως ΑΔ=ΔΒ απ' όπου προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 (1)$.

Όμοια βρίσκουμε ότι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1 (2)$.

Από (1) και (2) έχουμε

$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + 90° + \hat{\Gamma}_1 = 90° + 90° = 180°$

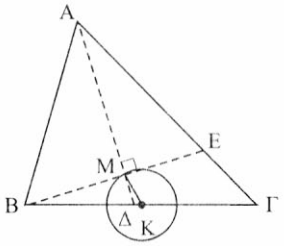
άρα Δ, Α, Ε συνευθειακά.



β) Επειδή ΑΜ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ΑΜ=ΒΜ οπότε $\hat{A}_3 = \hat{B}$ και επομένως $\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B} = \Delta\hat{B}M = 90°$. Έτσι έχουμε $\Delta\hat{B}M + \Delta\hat{A}M = 90° + 90° = 180°$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΜ είναι εγγράψιμο. Όμοια προκύπτει ότι $M\hat{A}E + M\hat{\Gamma}E = 180°$ που σημαίνει ότι και το ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμο.

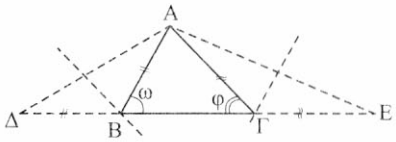
γ) Επειδή $M\Delta \perp AB$, $ME \perp A\Gamma$ και $\hat{A} = 90°$ προκύπτει ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ορθογώνιο στο Μ και επομένως κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι το μέσο Κ της πλευράς ΔΕ. Για να εφάπτεται ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΜΔΕ στη ΒΓ αρκεί $KM \perp B\Gamma$ που ισχύει γιατί ΒΓΕΔ τραπέζιο με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90°$ και ΜΚ//ΒΔ, ως διάμεσος του τραπεζίου.

2. Έστω ΑΒΓ μια θέση του τριγώνου ΑΒΓ με σταθερή τη ΒΓ και τη διαφορά $ΑΓ - ΑΒ = δ$. $(ΑΓ > ΑΒ)$. Έστω Μ η προβολή του Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ και Ε η τομή της προέκτασης της ΒΜ με την ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΑΜ είναι ύψος και διχοτόμος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλ. $ΑΕ = ΑΒ$ οπότε $ΕΓ = ΑΓ - ΑΕ = ΑΓ - ΑΒ = δ(1)$. Παίρνουμε το μέσο Κ της ΒΓ και έχουμε: $ΚΜ = \frac{ΕΓ}{2} = \frac{δ}{2}$, λόγω της (1), οπότε το Μ βρίσκεται στον κύκλο $(Κ, \frac{δ}{2})$.



Αντίστροφα. Έστω Μ σημείο του $(Κ, \frac{δ}{2})$. Φέρνουμε τη ΒΜ και στην προέκτασή της παίρνουμε ΜΕ=ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη ΒΕ που τέμνει την προέκταση της ΓΕ στο Α. Επειδή ΑΜ μεσοκάθετος της ΒΕ θα είναι $ΑΒ = ΑΕ$ και ΑΔ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$. Επίσης θα είναι $ΑΓ - ΑΒ = ΑΓ - ΑΕ = ΕΓ = 2 \cdot ΜΚ = 2\frac{δ}{2} = δ$. Το Μ επομένως είναι σημείο του τόπου. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος $(Κ, \frac{δ}{2})$.

3. Ανάλυση: Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{Β} = ω$, $\hat{Γ} = φ$ και $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = δ$. Προεκτείνουμε τη ΒΓ εκατέρωθεν κατά τμήματα ΒΔ=ΑΒ και ΓΕ=ΑΓ. Τότε από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$

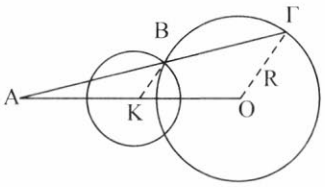


και ΔΕ=δ. Το τρίγωνο λοιπόν ΑΔΕ κατασκευάζεται από ΔΕ=δ, $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΔΕ και φέρνουμε τις μεσοκάθετες των ΑΔ και ΑΕ που τέμνουν αντίστοιχα τη ΔΕ στα Β, Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.
Απόδειξη: Επειδή Β σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΔ θα είναι ΑΒ=ΒΔ. Όμοια ΑΓ=ΓΕ οπότε: $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = δ$ και $\hat{Β} = 2\hat{Δ} = 2\frac{ω}{2} = ω$. Όμοια $\hat{Γ} = φ$

Διερεύνηση: Πρέπει $\hat{ω} + \hat{φ} < 180°$.

4. **Ανάλυση:** Έστω ΑΒΓ μια τέμνουσα του κύκλου ώστε Β μέσο ΑΓ. Παίρνουμε το μέσο Κ του ΑΟ. Τότε $KB = \frac{R}{2}$ και επομένως το Β ανήκει στον κύκλο $(K, \frac{R}{2})$.



Σύνθεση: Γράφουμε τον κύκλο $(K, \frac{R}{2})$ που τέμνει τον (Ο,R) στο Β, φέρνουμε την ΑΒ και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΓ=ΑΒ.

Απόδειξη: Τότε $OΓ = 2KB = R$ οπότε το Γ ανήκει στον κύκλο (Ο,R) και επομένως η ΑΒΓ είναι η ζητούμενη.

Διερεύνηση: Πρέπει οι κύκλοι να τέμνονται, δηλαδή $R < AO < 3R$

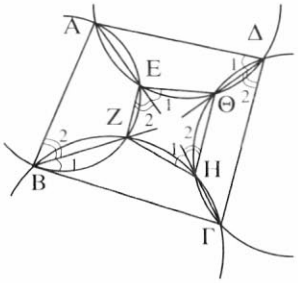
5. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2\angle$.

Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΘΔ είναι εγγεγραμμένο θα έχουμε $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 (1)$

Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΖΒ έχουμε: $\hat{E}_2 = \hat{B}_2 (2)$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχουμε

$\hat{H}_1 = \hat{B}_1 (3)$ και από το ΓΗΘΔ ότι $\hat{H}_2 = \hat{\Delta}_2 (4)$.

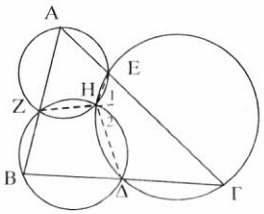


Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη βρίσκουμε

$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{E} + \hat{H} = \hat{\Delta} + \hat{B} (5)$.

Αλλά το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 2\angle$ οπότε από την (5) προκύπτει ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2\angle$ η οποία σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

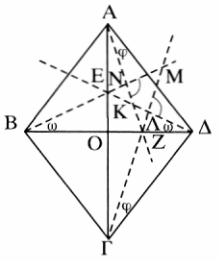
6. Έστω Η το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Α,Ζ,Ε) και (Β,Ζ,Δ). Για να διέρχεται και ο τρίτος κύκλος (Γ,Δ,Ε) από το Η, αρκεί το τετράπλευρο ΔΓΕΗ να είναι εγγράψιμο και για να συμβαίνει αυτό αρκεί $\hat{H} + \hat{\Gamma} = 2\angle$. Επειδή τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ και ΒΖΗΔ είναι εγγεγραμμένα έχουμε ότι:



$\hat{H}_1 = \hat{A}$ και $\hat{H}_2 = \hat{B}$ οπότε:

$\hat{H} + \hat{\Gamma} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, αφού $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Έστω ΚΛΜΝ το τετράπλευρο που ορίζουν οι ευθείες του προβλήματος. Για να δείξουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$.



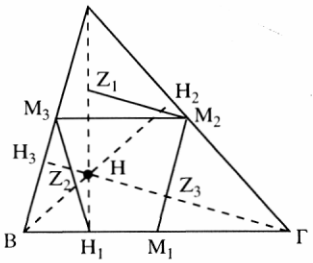
Θέτουμε $E\hat{B}\Delta = \omega$. Επειδή ΕΟ μεσοκάθετη της ΒΔ θα είναι και $E\hat{\Delta}B = \omega$. Όμοια αν θέσουμε $Z\hat{A}\Delta = \varphi$ θα είναι και $Z\hat{\Gamma}\Delta = \varphi$.

Η γωνία $\hat{N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΝΒΖ, οπότε έχουμε $\hat{N} = \hat{\omega} + B\hat{Z}N(1)$.

Αλλά και η $B\hat{Z}N$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΔ οπότε $B\hat{Z}N = \hat{\varphi} + Z\hat{\Delta}A(2)$.

Από (1),(2) έχουμε $\hat{N} = \hat{\omega} + \hat{\varphi} + Z\hat{\Delta}A(3)$. Η $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΛΓΔ οπότε $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} + Z\hat{\Delta}\Gamma(4)$. Από (3) και (4) λαμβάνοντας υπόψη ότι $Z\hat{\Delta}A = Z\hat{\Delta}\Gamma$ (οι διαγώνιες ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του) προκύπτει ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$ δηλαδή το ζητούμενο.

8. i) Επειδή M_2, M_3 μέσα των ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, θα είναι M_2M_3 //ΒΓ δηλ. το $H_1M_1M_2M_3$ είναι τραπέζιο. Αλλά, επειδή πάλι M_1,M_2 μέσα των ΒΓ, ΓΑ θα είναι $M_1M_2 = \frac{AB}{2}(1)$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AH_1B το H_1M_3 είναι διάμεσος, άρα $H_1M_3 = \frac{AB}{2}(2)$.



Από (1), (2) προκύπτει ότι: $M_1M_2 = H_1M_3$ το οποίο σημαίνει ότι το H_1M_1 M_2M_3 είναι ισοσκελές τραπέζιο και επομένως (εφαρμογή.2) είναι εγγράψιμο.

ii) Στο τρίγωνο ΑΗΓ είναι Z_1 μέσο ΑΗ και M_2 μέσο ΑΓ οπότε, Z_1M_2//ΓΗ. Αλλά και M_2M_1//ΑΒ. Απ' αυτές και επειδή ΓΗ⊥ΑΒπροκύπτει $Z_1M_2 \perp M_2M_1$, οπότε στο τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ έχουμε $\hat{H}_1 + \hat{M}_2 = 90° + 90° = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι το $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο.

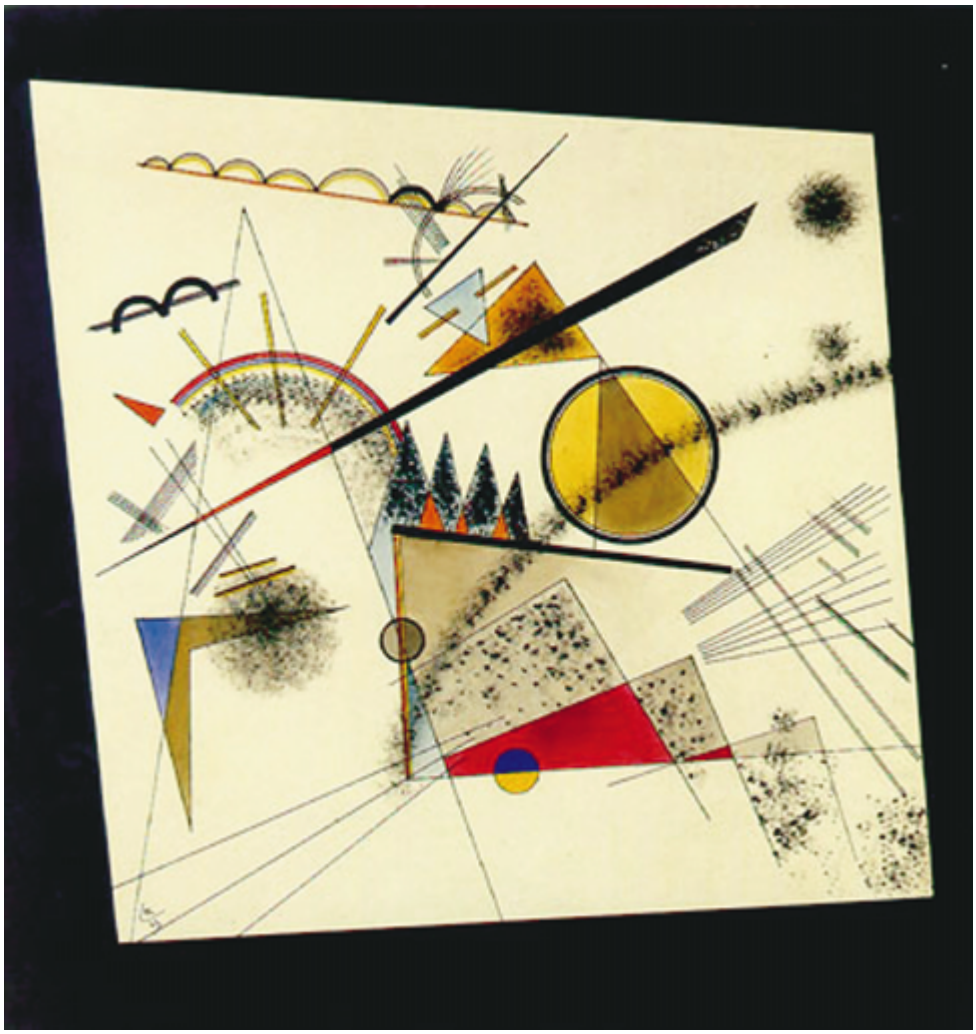
iii) Από το i) προκύπτει ότι το H_1 είναι σημείο του κύκλου (M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα H_2, H_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Από το ii) συμπεραίνουμε ότι το Z_1 είναι σημείο του κύκλου (H_1,M_1,M_2) ο οποίος σύμφωνα με το i) ταυτίζεται με τον (M_1, M_2, M_3), άρα το Z_1 είναι σημείο του κύκλου (M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα Z_2, Z_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Άρα τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i □ 1, 2, 3 είναι σημεία ομοκυκλικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Αναλογίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά τα ευθύγραμμα τμήματα. Θα εισάγουμε την έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων, απ' όπου θα προκύψει η έννοια της μέτρησης και του μέτρου ευθύγραμμου τμήματος.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι βασικές προτάσεις του κεφαλαίου που είναι το θεώρημα του Θαλή και το θεώρημα των Διχοτόμων ενός τριγώνου.



Βασίλη Καντίνσκυ, (Ρώσος, 1866 - 1944), «*Μέσα στο μαύρο τετράγωνο*» 1923.

7.1 Εισαγωγή

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. **Γεωμετρικά μεγέθη** λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα απλούστερα γεωμετρικά μεγέθη, τα ευθύγραμμα τμήματα.

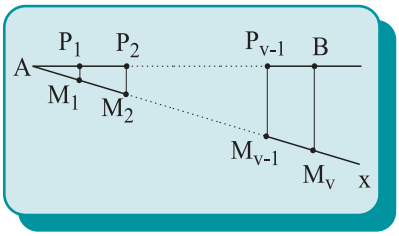
Αρχικά θα διαιρέσουμε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο θέλουμε να διαιρέσουμε σε ν ίσα μέρη ($\nu \geq 2$).

Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Αx, διαφορετική από την ΑΒ και παίρνουμε με το διαβήτη πάνω σε αυτή ν διαδοχικά ίσα τμήματα $AM_1 = M_1M_2 = ... = M_{\nu-1}M_\nu$.

Έπειτα φέρουμε το τμήμα $M_\nu B$ και από τα σημεία M_1, M_2, ..., $M_{\nu-1}$ φέρουμε παράλληλες προς τη $M_\nu B$ που τέμνουν το ΑΒ στα σημεία P_1, P_2, ..., $P_{\nu-1}$ αντίστοιχα. Οι παράλληλες αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, § 5.6, ορίζουν ν ίσα τμήματα πάνω στην ΑΒ. Επομένως τα ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα AP_1, P_1P_2, ..., $P_{\nu-1}B$ είναι τα ζητούμενα.



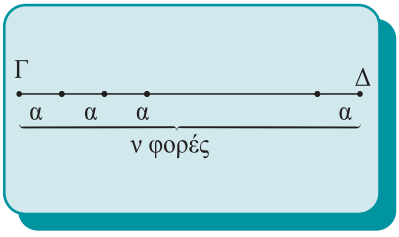
Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα ορίσουμε, γενικά, το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με οποιοδήποτε ρητό αριθμό και το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό – Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.

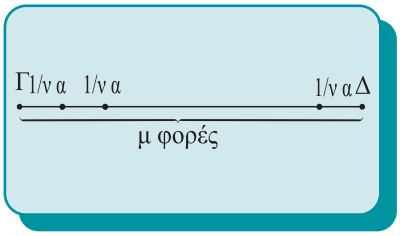
• Όπως είδαμε στην §2.8, αν ΑΒ=α ευθύγραμμο τμήμα και ν **φυσικός** αριθμός, ονομάζουμε γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα ν ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ=α. Γράφουμε ΓΔ=ν · ΑΒ.

• Αν χωρίσουμε, όπως παραπάνω, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α σε ν ίσα μέρη καθένα από τα ν ίσα τμήματα τα παριστάνουμε



Σχήμα 2

με $\frac{AB}{\nu}$ ή $\frac{1}{\nu}\cdot AB$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται ***υποδιαίρεση*** (ή ***υποπολλαπλάσιο***) του ΑΒ αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν ώστε $EZ = \frac{AB}{\nu}$.



Σχήμα 3

• Αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος και προσθέσουμε μ τέτοια τμήματα προκύπτει το τμήμα $ΓΔ = \mu\left(\frac{1}{\nu}AB\right) = \frac{\mu}{\nu}AB$.

Ονομάζουμε λοιπόν ***γινόμενο*** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \frac{\mu}{\nu}$ το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{1}{\nu}AB$.

Γράφουμε $ΓΔ = q \cdot AB$.

Ορίζουμε ότι το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί τον αριθμό q = 0 είναι το **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

Αποδεικνύεται ότι για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα **θετικό άρρητο** αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο, ώστε $ΓΔ = \rho \cdot AB$. Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή.

• Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: $AB = \nu \cdot KΛ$ και $ΓΔ = \mu \cdot KΛ$ τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα***. Το ΚΛ λέγεται ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι σύμμετρα, τότε θα υπάρχει ένας θετικός ρητός αριθμός $q = \frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε $ΓΔ = q \cdot AB$. Ο αριθμός q λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων και γράφεται με μορφή κλάσματος, δηλαδή $q = \frac{ΓΔ}{AB}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η γραφή $\frac{ΓΔ}{AB}$ δεν σημαίνει διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας $ΓΔ = q \cdot AB$. Σημαίνει διαίρεση όταν τα θεωρήσουμε πάνω στην ίδια ευθεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Το κοινό μέτρο δεν είναι μοναδικό γιατί κάθε υποδιαίρεση του ΚΛ είναι κοινό υποπολλαπλάσιο των ΑΒ και ΓΔ. Επίσης είναι φανερό ότι **δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι (ακέραια) πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.***

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα.** Θα λέμε επίσης ότι ο λόγος τους είναι **άρρητος** αριθμός. Τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι σπάνιες. Θα δούμε αργότερα ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ***ανάλογα*** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ, δηλαδή όταν ισχύει:

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει $\alpha = \lambda \cdot \beta$ και $\gamma = \lambda \cdot \delta$.

Η παραπάνω ισότητα (1) λέγεται ***αναλογία*** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ και δ. Τα τμήματα α και β λέγονται ***ομόλογα*** ή ***αντίστοιχα***. Το ίδιο και τα γ και δ.

Τα α, δ λέγονται ***άκροι όροι,*** ενώ τα β, γ ***μέσοι όροι*** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και ***τέταρτη ανάλογος*** των α, β και γ.

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται ***συνεχής*** και ο β λέγεται ***μέση ανάλογος*** των α και γ. Το β λέγεται επίσης ***γεωμετρικός μέσος*** των α και γ. Συχνά είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μια αναλογία με μια ισοδύναμη έκφραση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογιών, που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, τις οποίες παίρνουμε χωρίς απόδειξη. Οι σπουδαιότερες από αυτές είναι οι εξής:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \cdots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \cdots + \kappa}{\beta + \delta + \cdots + \lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εφαρμόζουμε ιδιότητες σε αναλογίες με όρους ευθύγραμμα τμήματα, θεωρούμε ότι έννοιες που δεν έχουν οριστεί για ευθύγραμμα τμήματα (π.χ. "πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων"), αναφέρονται αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι θα **μετρήσουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σημαίνει ότι θα το συγκρίνουμε με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο παίρνουμε ως **μονάδα μέτρησης**. Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη.

Στο 2ο κεφάλαιο αναφέραμε την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ θα διατυπώσουμε τον ορισμό με τη βοήθεια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- *Το μέτρο του τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Έτσι, **με το σύμβολο ΑΒ θα εννοούμε και το μέτρο του τμήματος ΑΒ**.*
- *Όσα αναφέραμε για το **λόγο** και το **μέτρο** τμήματος ισχύουν γενικά και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη, όπως η γωνία, το τόξο κτλ.*

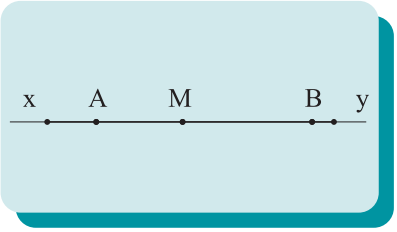
Ορισμός

***Μέτρο* ή *μήκος* ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.**

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του μέτρου τμήματος είναι οι παρακάτω προτάσεις:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο



Σχήμα 4

Είδαμε στην § 7.2 πώς διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη. Θα δούμε στη συνέχεια πότε ένα σημείο Μ διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο. Σε ευθεία xy δίνονται δύο ορισμένα σημεία Α και Β. Έστω σημείο Μ της ευθείας xy, διαφορετικό του Β. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τότε ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το Μ *διαιρεί εσωτερικά* το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν** $\frac{MA}{MB} = \lambda$. Για το σημείο Μ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Το σημείο Μ είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Πράγματι, αν Μ΄ εσωτερικό σημείο του ΑΒ ώστε $\frac{M'A}{M'B}=\lambda$, τότε έχουμε:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+MB}=\frac{M'A}{M'A+M'B} \Leftrightarrow$$

$$\frac{MA}{AB}=\frac{M'A}{AB} \Leftrightarrow MA = M'A,$$

οπότε το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Μ′.

Αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$, τότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+MB}=\frac{\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow \boxed{MA=\frac{\lambda}{\lambda+1}AB} \text{ και}$$

$$MB = AB - MA = AB - \frac{\lambda}{\lambda+1}AB \Leftrightarrow \boxed{MB=\frac{1}{\lambda+1}AB}.$$

2) Αν Μ σημείο στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε πάλι ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το Μ *διαιρεί εξωτερικά* το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$.** Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση, **το σημείο Μ είναι μοναδικό**.

Διερεύνηση

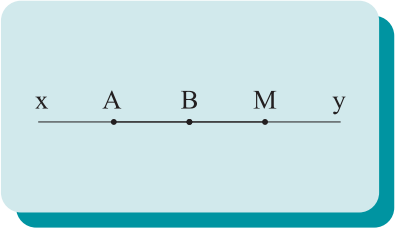
(i) Αν λ=1, τότε προφανώς δεν υπάρχει σημείο Μ που να διαιρεί εξωτερικά το ΑΒ σε λόγο λ=1, αφού ΜΑ ≠ ΜΒ. Στην περίπτωση αυτή το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

(ii) Αν λ>1, τότε $\frac{MA}{MB}>1 \Leftrightarrow MA>MB$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Β (σχ.5). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

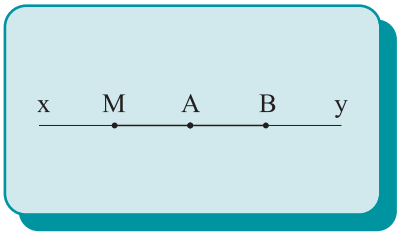
$$\frac{MA}{MB}=\lambda \Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA-MB}=\frac{\lambda}{\lambda-1} \Leftrightarrow \frac{MA}{AB}=\frac{\lambda}{\lambda-1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{MA=\frac{\lambda}{\lambda-1}AB} \text{ και } MB = MA - AB = \frac{\lambda}{\lambda-1}AB - AB \Leftrightarrow$$

$$\boxed{MB=\frac{1}{\lambda-1}AB}.$$



Σχήμα 5



Σχήμα 6

(iii) Αν $\lambda < 1$ τότε $\frac{MA}{MB} < 1 \Leftrightarrow MA < MB$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Α (σχ.6). Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$MA = \frac{\lambda}{1-\lambda} AB \quad \text{και} \quad MB = \frac{1}{1-\lambda} AB .$$

(iv) Οριακές θέσεις

α) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Α, το τμήμα ΜΑ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο μηδέν.

β) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Β, το τμήμα ΜΒ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο άπειρο.

γ) Όταν το σημείο Μ απομακρύνεται απεριόριστα, τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ τείνουν να ταυτιστούν, οπότε ο λόγος λ τείνει στη μονάδα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

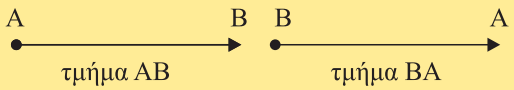
Δεχόμαστε συμβατικά πως, όταν λέμε ότι το σημείο Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, εννοούμε

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \text{ και όχι } \frac{MB}{MA} = \lambda .$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

• *Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε το σημείο Μ τέτοιο ώστε* $\frac{MA}{MB} = \lambda$ *βρίσκεται μεταξύ Ο και Α όταν* $\lambda<1$ *και μεταξύ Ο και Β όταν* $\lambda>1$.

• *Αν* $\frac{MB}{MA} = \lambda$, *λέμε ότι το Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ σε λόγο λ. Δηλαδή θεωρούμε ότι τα άκρα Α και Β του τμήματος είναι* ***διατεταγμένα.*** *Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται* ***προσανατολισμένο.***



Σχήμα 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους:*

i) της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο,

ii) μιας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη,

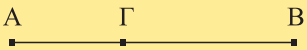
iii) της διαμέτρου ενός κύκλου, προς την ακτίνα του,

iv) μιας ορθής γωνίας προς μια γωνία ισόπλευρου τριγώνου.

2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 10α και ΑΓ = 2α. Να βρεθούν οι λόγοι:*

i) ΑΒ προς ΑΓ, *ii) ΑΓ προς ΑΒ,*
iii) ΒΓ προς ΑΒ, *iv) ΑΓ προς ΒΓ.*

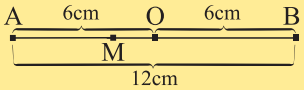
3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Γ έτσι ώστε* $\frac{AΓ}{ΓB} = \frac{1}{2}$.



Τότε ο λόγος $\frac{BΓ}{AB}$ *είναι: i) 2 ii) 3 iii)* $\frac{3}{2}$ *iv)* $\frac{2}{3}$ *v) κανένα από τα παραπάνω.*

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

4. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12 cm και το μέσο του Ο. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΟ, ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα ΑΟ στον ίδιο λόγο.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.*

2. *Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι* $\frac{1}{3}$. *Να βρεθεί η γωνία ω.*

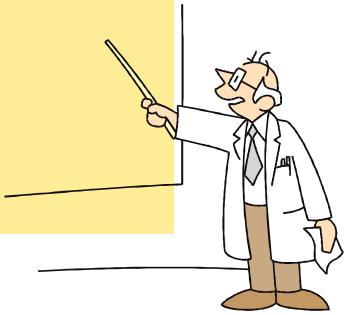
3. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.*

2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm, ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.*

3. *Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα ΑΒ = α σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο* $\frac{3}{4}$.



7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην § 5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν **ίσα** τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

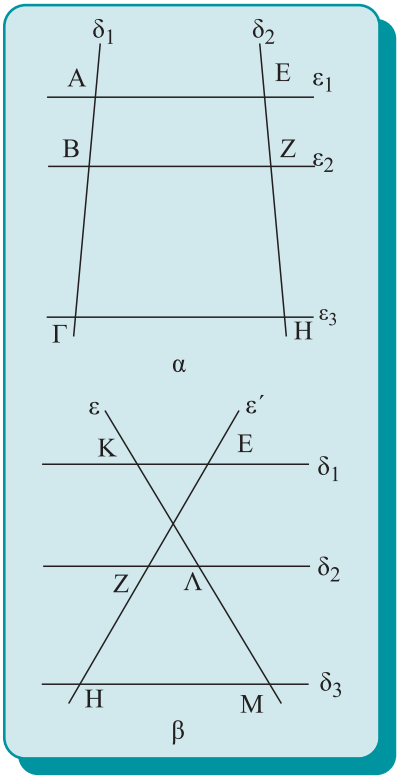
Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

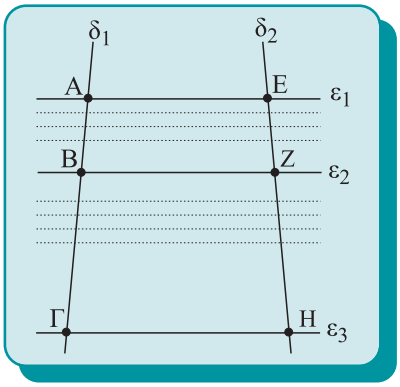
Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, **τότε** $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$ **(σχ.8α).**

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$, **τότε** $\frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\Lambda M}{ZH} = \frac{KM}{EH}$ **(σχ.8β).**



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Απόδειξη

(i) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ τέτοιο, ώστε ΑΒ = κμ και ΒΓ = λμ (1), όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Διαιρούμε το τμήμα ΑΒ σε κ τμήματα ίσα με το μ και το ΒΓ σε λ τμήματα ίσα με το μ.

Από τα σημεία που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την $ε_1$, οι οποίες τέμνουν τη $δ_2$. Επειδή τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_1$ είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_2$ θα είναι ίσα τμήματα, που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε θα έχουμε ΕΖ = κν και ΖΗ = λν (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{κμ}{λμ} = \frac{κ}{λ}$ και

$$\frac{ΕΖ}{ΖΗ} = \frac{κν}{λν} = \frac{κ}{λ}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} \quad (3).$$

Από την αναλογία (3) παίρνουμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΑΒ+ΒΓ}{ΕΖ+ΖΗ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΑΓ}{ΕΖ}.$$

(ii) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία.

Ισχύει και το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**.

Θεώρημα

Θεωρούμε δύο ευθείες $δ_1$ και $δ_2$ που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα.

Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών $δ_1$ και $δ_2$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$ (σχ.9).

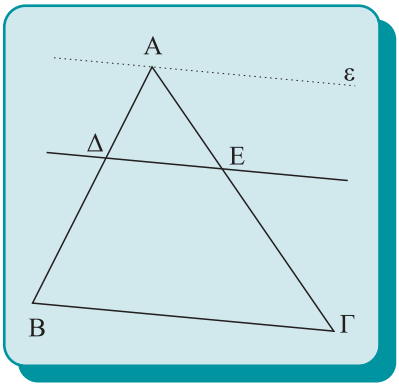
Πορισμα

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.10).
Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε//ΒΓ//ΔΕ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΕΓ}}.$$



Σχήμα 10

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.12). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}}.$$

Επειδή ΔΕ//ΒΓ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} \quad (1).$$

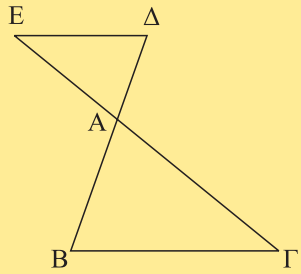
Φέρουμε την ΕΖ παράλληλη της ΑΒ, οπότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΕ=ΒΖ (2).
Επειδή ΕΖ//ΑΒ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΒΓ}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} \quad (3).$$

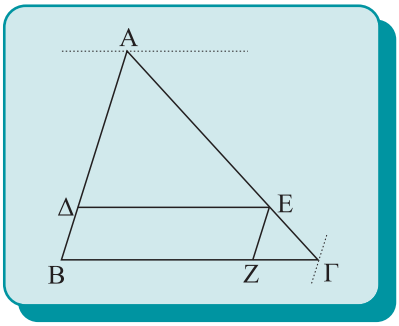
Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

• Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή γίνονται ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές. Δύο από τις σπουδαιότερες είναι τα παρακάτω προβλήματα.

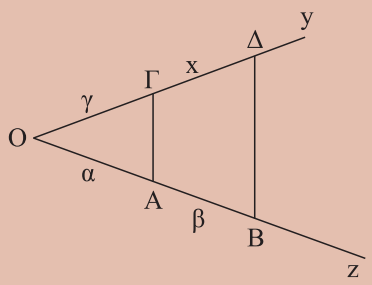
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου)

Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ, να κατασκευασθεί το τμήμα x, που ορίζεται από την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$.

Λύση

Έστω μια γωνία $z\hat{O}y$. Πάνω στη μία πλευρά της Oz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β και πάνω στην Oy το τμήμα ΟΓ = γ. Από το Β φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει την Oy στο Δ.
Τότε ΓΔ = x γιατί

$$\frac{OA}{AB}=\frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}.$$



Σχήμα 13

Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται το τμήμα x αν $\frac{x}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x}{\gamma}$,
αρκεί κάθε φορά να γράφουμε το x ως τέταρτο όρο της αναλογίας.

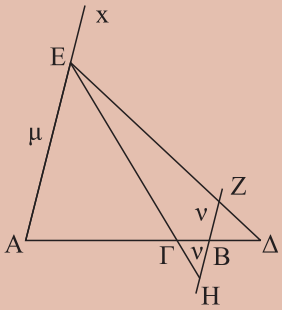
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εσωτερικά και εξωτερικά, σε δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ,ν γνωστά τμήματα.

Λύση

Από το Α φέρουμε μια ημιευθεία Ax, πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΕ=μ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη της Ax και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του Β τμήματα ΒΖ=ΒΗ=ν. Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες ΕΗ και ΕΖ τέμνουν την ευθεία ΑΒ είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΓΗΒ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{AE}{BH}=\frac{\mu}{\nu}.$$

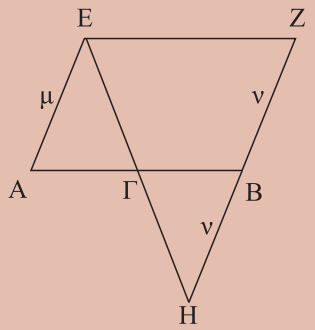


Σχήμα 14

Όμοια τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΒΖ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{AE}{BZ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

• Αν μ=ν, το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΕΖ **δε** δίνει σημείο Δ πάνω στην ΑΒ, ενώ το Γ είναι το **μέσο** του ΑΒ.



Σχήμα 15

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται ***συζυγή αρμονικά*** των Α και Β (σχ.16).

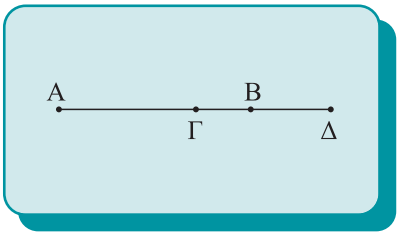
Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{\Gamma A}{\Delta A}=\frac{\Gamma B}{\Delta B} \text{ ή } \frac{A\Gamma}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{B\Delta},$$

από την οποία προκύπτει ότι και τα Α και Β είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ. Τα τέσσερα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) λέμε ότι αποτελούν ***αρμονική τετράδα***.



Σχήμα 16

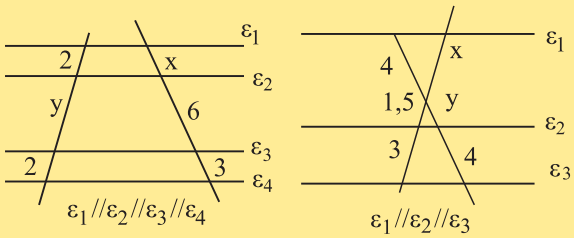
Σημείωση

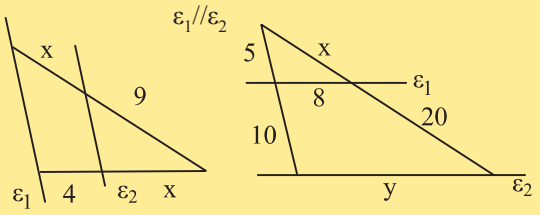
*Το Δ λέγεται **αρμονικό συζυγές** του Γ ως προς τα Α και Β. Όπως είδαμε παραπάνω, αν το Γ είναι το μέσο του ΑΒ, το Δ **δεν** υπάρχει.*

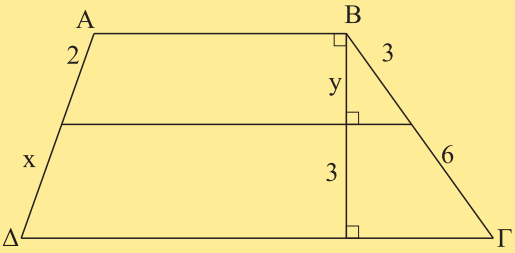
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

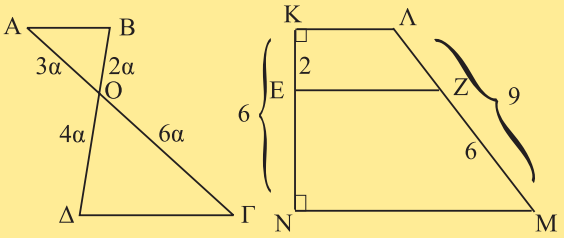
1. *Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*







2. *Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΒ//ΓΔ και ΕΖ//ΚΛ//ΜΝ στα παρακάτω σχήματα.*

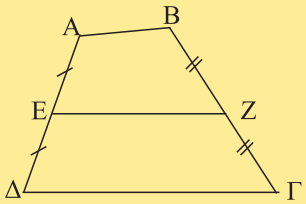


3. *Στο διπλανό σχήμα είναι:*

i) $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$ *Σ Λ*

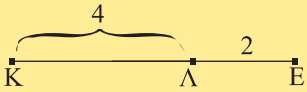
ii) ΕΖ//ΓΔ Σ Λ

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4. *Δίνεται τμήμα ΑΒ και δυο σημεία Γ και Δ ώστε* $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$. *Αρκεί η προηγούμενη σχέση ώστε τα Γ και Δ να είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β;*

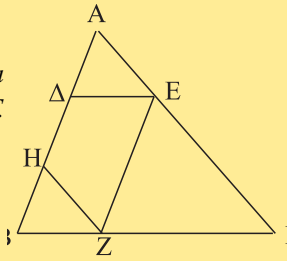
5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΚΛ = 4, ΛΕ = 2. Να βρεθεί σημείο Ζ τέτοιο, ώστε τα σημεία (Ζ,Ε) να είναι συζυγή αρμονικά των (Κ,Λ).*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ, ΕΖ//ΑΒ και ΖΗ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}.$$



2. *Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι*

i) $\frac{AZ}{AH} = \frac{AB}{\Delta H}$, *ii)* $AE^2 = EA \cdot EH$.

3. *Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ.*

4. *Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του ΑΜ, που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.*

Να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

5. *Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΔΒ.*

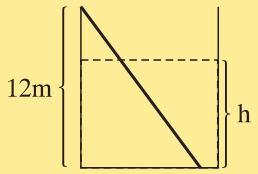
6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε* $B\Delta = \Gamma E < \frac{B\Gamma}{2}$. *Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*

7. *Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου*

ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ .

8. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.*

9. *Δεξαμενή ύψους υ=12m περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h. Ράβδος μήκους 15m τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος 10m. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και Ο είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.*

2. *Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε τμήματα x, y, ω τέτοια, ώστε 4x = 6y = 3ω.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ και Η είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της ΔΒ τέτοιο, ώστε* $\Delta E = \frac{1}{5}\Delta B$. *Αν η ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = 3ΔΖ.*

5. *Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, που τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = 1.$$

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ. Να αποδείξετε ότι:*
i) Το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
ii) ΚΕ//ΑΓ.

7. *Τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν τη ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΓΖ.*

Σύνθετα θέματα

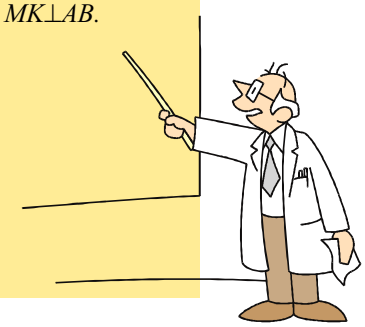
1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε* $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{EA}$. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.*

2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
ΖΑ · ΗΓ = ΗΑ · ΖΒ.

3. *Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.*

4. *Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το ΑΔ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά ΑΓ.*

5. *Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ, στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΜΚ⊥ΑΒ.*

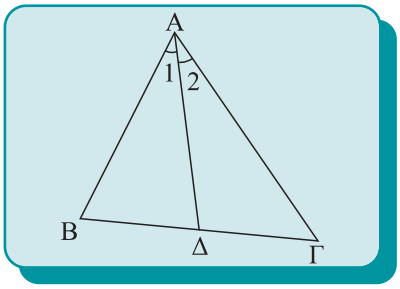


7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

Θα μελετήσουμε εδώ, ως εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή, βασικές ιδιότητες της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.

Θεώρημα (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.



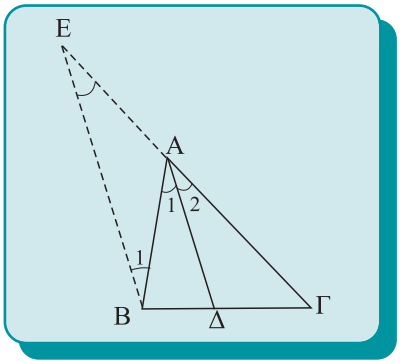
Σχήμα 17

Δηλαδή, αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ (σχ.18). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AE}{A\Gamma}$ (1).



Σχήμα 18

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1=\hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_2=\hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος),

οπότε $\hat{B}_1=\hat{E}$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

Επειδή το σημείο Δ που διαιρεί την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$ τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία διαιρεί η διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.**

Στο σχ.18 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Δ από τα Β και Γ.

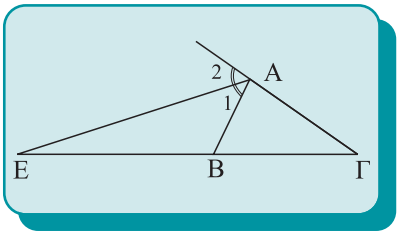
Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{\gamma}{\beta} \text{ ή } \frac{\Delta B}{\Delta B+\Delta \Gamma}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma} \text{ ή } \frac{\Delta B}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

οπότε $\Delta B=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$. Όμοια βρίσκουμε $\Delta \Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$.

Θεώρημα (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.



Σχήμα 19

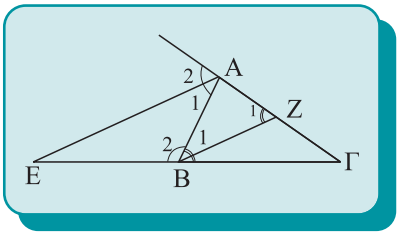
Δηλαδή, αν η ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι:

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η εξωτερική διχοτόμος του ΑΕ (σχ.20). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΕ έχουμε

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AZ}{A\Gamma} \quad (1).$$



Σχήμα 20

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΖ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1=\hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{A}_2=\hat{Z}_1$(εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΑΕ εξωτερική διχοτόμος),

οπότε $\hat{B}_1=\hat{Z}_1$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Το σημείο Ε βρίσκεται προς το μέρος της **μικρότερης** πλευράς.*
Πράγματι αν $\beta>\gamma$ τότε $\hat{B}>\hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{\Gamma}=\varphi>0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1+\hat{B}_2<180^o$.

Έχουμε $\hat{A}_1=\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$ και $\hat{B}_2=180^o-\hat{B}$, οπότε

$$\hat{A}_1+\hat{B}_2=180°-\hat{B}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=180°-\left(\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right)=180°-\frac{\varphi}{2}<180°.$$

*Αν ΑΒ = ΑΓ, τότε το Ε **δεν** υπάρχει. (Εφαρμογή 1 – § 4.8)*

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:
Αν το Ε είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{ΒΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, τότε η ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία διαιρεί η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.**

Στο σχ.20 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Ε από τα Β και Γ.
Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

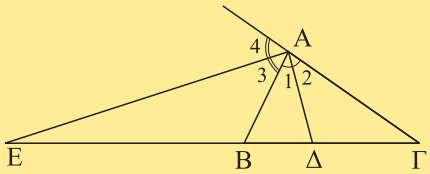
$$\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{\gamma}{\beta} \quad ή \quad \frac{ΕΒ}{ΕΓ-ΕΒ}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma} \quad ή \quad \frac{ΕΒ}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma} ,$$

οπότε $ΕΒ=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $ΕΓ=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν Δ και Ε είναι τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, στην απέναντι πλευρά, θα είναι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ και $\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, οπότε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΕΒ}{ΕΓ}$.

*Δηλαδή τα ίχνη Δ και Ε των δύο διχοτόμων είναι σημεία **συζυγή αρμονικά** ως προς τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.*



Σχήμα 21

7.9 Απολλώνιος Κύκλος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

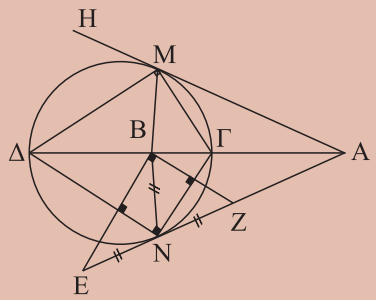
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύση

Έστω δύο δεδομένα σημεία Α, Β και Μ τυχαίο σημείο του τόπου με την ιδιότητα $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).

Φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο ΜΓ και την εξωτερική διχοτόμο ΜΔ του τριγώνου ΜΑΒ. Τότε

$\frac{ΓA}{ΓB} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (2) και $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (3).



Σχήμα 22

Δηλαδή, τα σημεία Γ και Δ είναι ορισμένα, αφού χωρίζουν το ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. Ακόμα είναι $Γ\hat{M}Δ = 90°$, επειδή οι ΜΓ και ΜΔ είναι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $A\hat{M}B$ και $B\hat{M}H$.
Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.

Αντίστροφα: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ. Τότε $Γ\hat{N}Δ = 90^o$.

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Από το Β φέρουμε ΒΕ//ΓΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι

$$\frac{NA}{NE} = \frac{ΓA}{ΓB} \text{ ή λόγω της (2) } \frac{NA}{NE} = \frac{\mu}{\nu} \quad (4).$$

Επίσης φέρουμε ΒΖ//ΔΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΝ είναι

$$\frac{NA}{NZ} = \frac{ΔA}{ΔB} \text{ ή λόγω της (3) } \frac{NA}{NZ} = \frac{\mu}{\nu} \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}$, οπότε ΝΕ=ΝΖ, δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΕΖ.

Επειδή $Γ\hat{N}Δ = 90^o$ και ΒΕ//ΓΝ, ΒΖ//ΔΝ, θα είναι και $E\hat{B}Z = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο στο $\hat{B}$ με διάμεσο ΒΝ, οπότε ΝΒ = ΝΕ = ΝΖ (6).

Από τις σχέσεις (4) και (6) έχουμε $\frac{NA}{NB}=\frac{\mu}{\nu}$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ.

Κατασκευή

Αν δοθούν τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, διαιρούμε το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπως στο πρόβλημα 2, § 7.7 και βρίσκουμε τα Γ και Δ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΓΔ.

Διερεύνηση

Αν είναι $\frac{\mu}{\nu}=1$, τότε $\frac{MA}{MB}=1$ ή ΜΑ = ΜΒ. Άρα το Μ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Ο προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται **Απολλώνιος κύκλος**, από το όνομα του Έλληνα μαθηματικού Απολλωνίου που πρώτος μελέτησε το θέμα.*
Γενικά υπάρχουν άπειροι απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α και Β. Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς, όταν δοθούν τα Α και Β, χρειάζεται να δοθεί ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ισοδύναμα, ένα τυχαίο σημείο του απολλώνιου κύκλου, ώστε ο λόγος να είναι προσδιορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

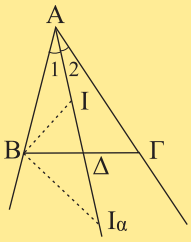
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.*

2. *Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $\Delta B=\frac{\gamma}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί $\beta+\gamma=2\alpha$.*

3. *Τι ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς δυο σημεία Α και Β; Πόσοι τέτοιοι Απολλώνιοι κύκλοι υπάρχουν; Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς;*

4. *Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ η διχοτόμος, Ι το έγκεντρο και Ια το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία (Α,Δ) και (Ι,Ια) αποτελούν αρμονική τετράδα;*
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



5. *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο λ=1 είναι:*
i) Κύκλος διαμέτρου ΑΒ *ii) Η μεσοκάθετος του ΑΒ*
iii) Το μέσο Μ του ΑΒ *iv) Κανένα από τα παραπάνω.*
(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $\frac{AE}{EM} = 2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΒΓ=10, ΑΓ=9. Αν ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$, *να υπολογισθεί το ΔΕ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} = 90°$ *και η διάμεσός του ΑΜ. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $A\hat{M}B$ *τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΑ · ΔΒ = ΕΓ · ΑΔ.*

4. *Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών* $A\hat{M}B$ *και* $A\hat{M}\Gamma$ *τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.*

5. *Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :*

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

6. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΔ · ΔΓ = ΕΓ · ΔΒ.*

7. *Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του Ε, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.*

8. *Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες* $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45°$ *και τα σημεία Α, Δ των Ox, Ot αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΔ. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Oy, Oz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $AB^2 = B\Gamma\cdot A\Delta$.

2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και το έγκεντρό του Ι.*

i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{AI}{I\Delta}$ *, ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.*

ii) Αν $\beta + \gamma = 2\alpha$ *και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:*

α) ΙΚ//ΒΓ *β)* $ZE = \frac{\beta+\gamma}{3}$ *, όπου Ζ, Ε τα σημεία τομής των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία ΙΚ.*

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{B}$ *και* $\hat{\Gamma}$ *ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τη διάμεσό του ΑΜ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

5. *Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $A\hat{O}B$ *τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $Z\Delta\cdot B\Gamma = Z\Gamma\cdot A\Delta$,

ii) $E\Delta\cdot B\Gamma = EB\cdot A\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν η κάθετη διάμετρος ΚΛ στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ, Λ.*

2. *Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι ΑΒ · ΓΔ = ΑΔ · ΒΓ. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.*

3. *Δίνεται τόξο* $\overset{\frown}{AB}$ *κύκλου (Ο,R). Να ορίσετε σημείο Μ του τόξου* $\overset{\frown}{AB}$*, τέτοιο ώστε* $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$*, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = ΒΖ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας* $B\hat{\Gamma}\Delta$.

5. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=α, ύψος ΑΗ=υ και* $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ *, όπου μ,ν δοσμένα τμήματα.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΔΕ και την ΑΒ κάθετη στη ΔΕ . Να αποδείξετε ότι*

$$AB = \frac{2R\rho}{R+\rho}.$$

2. *Μια μεταβλητή ευθεία ε, διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = 1 .$$

3. *i)* ***Θεώρημα Μενελάου****. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$

ii) ***Θεώρημα Ceva****. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των ευθειών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν, τότε ισχύει:*

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Να εξετασθεί και για τα δύο θεωρήματα, αν ισχύει το αντίστροφο.

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι* $\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = 1.$

5. *Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Αν Μ είναι σημείο της χορδής και οι ευθείες ΜΑ και ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $EZ\cdot Z\Delta = E\Delta\cdot Z\Gamma$.

6. *Αν τα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) αποτελούν αρμονική τετράδα και το Β είναι μεταξύ των Γ, Δ, να αποδείξετε ότι:*
i) $OA^2 = O\Gamma\cdot O\Delta$, *όπου Ο το μέσο του ΑΒ.*
ii) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{A\Delta}$.

7. *Να κατασκευαστεί εσωτερική ημιευθεία Αx της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέτοια, ώστε αν Δ, Ε είναι οι προβολές των Β, Γ στην Αx αντίστοιχα, να είναι* $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\mu}{\nu}$, *όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.*

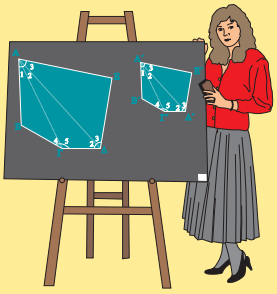
8. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Α στο εσωτερικό της γωνίας. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Β και Γ, ώστε:*
i) το Α να είναι μέσο του ΒΓ,
ii) να είναι $AB = \frac{2}{3}B\Gamma$ *και*
iii) να είναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, *όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.*

9. *Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Α΄. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ, ώστε να είναι:*
i) $AB = A\Gamma$, *ii)* $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$.

10. *Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου ΑΒΓ και Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι*

$$\frac{IA}{I\Delta} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} \geq 6.$$

Δραστηριότητες



1. *Να αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.*

2. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τυχαίο σημείο Α του επιπέδου, διαφορετικό των Β και Γ. Να κατασκευάσετε τον Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Β και Γ, ο οποίος διέρχεται από το Α.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να εξετάσετε αν τα Β και Γ ανήκουν στον ίδιο Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Δ και Α. Να κατασκευάσετε τον παραπάνω κύκλο και να βρείτε το λόγο* $\frac{M\Delta}{MA}$ *ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου.*

Εργασία

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ της ευθείας ΑΒ. Να βρεθεί το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα Α και Β (δύο περιπτώσεις).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μέτρηση

Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της κοινωνίας η μέτρηση γινόταν «με το μάτι», αφού το μέτρο δεν είχε διακριθεί ως ανεξάρτητη ιδιότητα ενός αντικειμένου. Στην πορεία ανάπτυξης της κοινωνίας, όταν τέτοιου είδους «ποιοτικά» μέτρα κρίθηκαν ανεπαρκή, εμφανίσθηκαν κάποια φυσικά μέτρα, που ήταν συνήθως μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως το μήκος του ποδιού, το πλάτος της παλάμης κ.ά. Για την ύπαρξη τέτοιων μέτρων μαρτυρούν και οι ονομασίες των μέτρων μήκους που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα, όπως «πόδι», «δάκτυλος», «παλάμη» κ.α. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνταν αρχικά για τον προσδιορισμό της ισότητας των μετρούμενων μεγεθών ή της ισοδυναμίας των σχημάτων. Το μέτρο ενός μεγέθους A ήταν το πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδας E.

Η ανάγκη για πιο ακριβείς μετρήσεις οδήγησε στη χρήση υποδιαιρέσεων της μονάδας μέτρου. Έτσι εμφανίστηκαν τα πρώτα «συγκεκριμένα κλάσματα», ως μέρη των συγκεκριμένων μέτρων από όπου προήλθαν. Η ιστορική διαδικασία γένεσης των συγκεκριμένων κλασμάτων ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης επιβεβαιώνεται από την ανομοιομορφία του συμβολισμού των κλασμάτων αυτού του τύπου. Στη Βαβυλώνα τα σύμβολα για το 1/2, το 1/3 και το 2/3 είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Στην αρχαία Αίγυπτο διακρίνονται τα *φυσικά κλάσματα* (1/2, 1/3, 1/4 και 2/3), που διαμορφώθηκαν από άμεσες πρακτικές ανάγκες και έχουν ιδιάζουσα ονοματολογία και ιερογλυφικό συμβολισμό, και τα *αλγοριθμικά κλάσματα*, που ήταν της μορφής 1/ν, και εμφανίσθηκαν ως προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας.

Η ανεξαρτητοποίηση του κλάσματος από το συνυφασμένο πεδίο μεγεθών ήταν πολύ πιο αργή από τη διαμόρφωση της έννοιας του φυσικού αριθμού. Δεν έγινε γρήγορα αντιληπτό ότι οι αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων δεν εξαρτώνται από τις ιδιότητες του πεδίου μεγεθών, στο οποίο ανήκουν.

Η πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης. Μία από τις σημαντικές διαφορές της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης από την Αιγυπτιακή και τη Βαβυλωνιακή είναι ότι τα προβλήματα της μέτρησης συνεχών μεγεθών τίθενται σε νέα θεωρητική βάση. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να αναζητούν μεθόδους μέτρησης με βάση κάποια αφηρημένη μονάδα μέτρου μήκους, επιφανείας ή όγκου. Και εδώ δεν εννοούμε εμπειρικές μεθόδους (προσεγγιστικού) προσδιορισμού του μέτρου που να ικανοποιούν πρακτικές ανάγκες. Απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μέτρου. Η νέα αυτή προσέγγιση απαιτούσε την εισαγωγή νέων θεωρητικών εννοιών και νέων τρόπων συλλογισμού. Κάθε συγκεκριμένο είδος μεγεθών είναι συνυφασμένο με ορισμένο τρόπο σύγκρισης των φυσικών αντικειμένων ή σωμάτων. Τα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια της έννοιας της «εφαρμογής» του ενός επί του άλλου, η οποία οδηγεί στην έννοια του μήκους: δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος αν με τη μεταφορά του ενός επί του άλλου «εφαρμόζουν», ενώ το ένα υπολείπεται του άλλου τότε το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Τα βάρη είναι μεγέθη άλλου είδους. Δεν έχει νόημα το ερώτημα αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους A με τη βοήθεια της μονάδας E συνίσταται αρχικά, στην αρχαία Ελλάδα στο να βρεθεί πόσες φορές περιέχεται η μονάδα στο A, δηλαδή ζητείται ο αριθμός α τέτοιος, ώστε $A = \alpha E$, όπου A και E είναι μεγέθη του αυτού είδους. Ένα μέγεθος Χ είναι κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, όταν περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών στα μεγέθη αυτά, δηλ. $A = \alpha X$, $B = \beta X$. Τότε τα μεγέθη λέγονται *σύμμετρα*.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της *ανθυφαίρεσης* ή *ανταναίρεσης* (γνωστής σήμερα ως *αλγόριθμος του Ευκλείδη*), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Αν υποθέσουμε ότι $A>B$, τότε αφαιρούμε το Β από το Α όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το Β μετρά ακριβώς το Α και είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο B_1, με $B>B_1$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα Β, B_1. Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το B_1 είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο B_2. Αν η επανάληψη

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

αυτής της διαδικασίας τερματιστεί σε κάποιο B_ν που μετρά ακριβώς το A_ν τότε το B_ν είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι *ασύμμετρα*. Πιθανότατα στο Θεαίτητο να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων».

Η ανακάλυψη ότι *δεν υπάρχει κοινό μέτρο της διαγωνίου και της πλευράς του τετραγώνου* αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Το πώς ακριβώς έγινε αυτή η ανακάλυψη παραμένει θέμα ανοικτό για το οποίο έχουν προταθεί ποικίλες ερμηνείες. Όμως η ανακάλυψη αυτή, καθώς και οι δυσκολία λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*) έδωσαν νέα ώθηση στα μαθηματικά των μετρούμενων μεγεθών.

Η γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Η ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη διατύπωση μιας νέας θεωρίας από τον Εύδοξο τον Κνίδιο που εκτίθεται στο Βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η *νέα θεωρία των αναλογιών* στηρίζεται στη γενική έννοια του μεγέθους, περιλαμβάνοντας έτσι και τους αριθμούς και τα άλλα συνεχή μεγέθη (μήκη, επιφάνειες, όγκοι). Η έννοια αυτή εισάγεται αξιωματικά με τη βοήθεια των *Κοινών Εννοιών* στο Βιβλίο Ι που ορίζουν τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας.

Ο Εύδοξος ορίζει πότε δύο ζεύγη Αρχιμήδειων μεγεθών α,β και γ,δ έχουν τον ίδιο λόγο με τη βοήθεια των πολλαπλασίων αυτών των μεγεθών, δηλαδή όταν: 1) $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\mu\gamma > \nu\delta$ ή 2) $\mu\alpha = \nu\beta$ και $\mu\gamma = \nu\delta$, ή 3) $\mu\alpha < \nu\beta$ και $\mu\gamma < \nu\delta$. Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη α, β, γ, δ λέγονται *ανάλογα*. Η σχέση της αναλογίας είναι σχέση τύπου ισότητας, δηλαδή συμμετρική και μεταβατική, και έτσι τα ζεύγη μεγεθών διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών που έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, ο λόγος μπορεί να εισαχθεί ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης.

Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της *εξάντλησης*, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος («Στοιχεία», Βιβλίο Χ, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μιά μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της.

Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης ο Εύδοξος απέδειξε τα παρακάτω θεωρήματα:

1. Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
2. Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος με την ίδια βάση και ύψος.
3. Ο όγκος του κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.

Με την ίδια μέθοδο ο Αρχιμήδης βρήκε ένα πλήθος νέων εμβαδών και όγκων, όπως το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου και κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας, τον όγκο της σφαίρας κ.ά.

Αρχιμήδεια και μη Αρχιμήδεια μεγέθη. Για να ισχύει η θεωρία των αναλογιών πρέπει να ορίζεται ο λόγος ανάμεσα στα συγκρινόμενα μεγέθη α,β. Αυτό εξασφαλίζεται αν υπάρχουν ακέραιοι μ και ν τέτοιοι, ώστε $\mu\alpha>\beta$ και $\nu\beta>\alpha$ («Στοιχεία», Βιβλίο V, Ορισμός 4). Η συνθήκη αυτή ονομάζεται σήμερα *αξίωμα του Ευδόξου* (ή, συχνότερα, *αξίωμα Αρχιμήδη – Ευδόξου*). Τα μεγέθη για τα οποία ικανοποιείται το αξίωμα αυτό λέγονται σήμερα *Αρχιμήδεια*.

Ας σημειωθεί πως μη Αρχιμήδεια μεγέθη ήταν γνωστά στην Ελληνική αρχαιότητα, όπως οι λεγόμενες *κερατοειδείς γωνίες*. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται π.χ. από το τόξο περιφέρειας και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της, δηλαδή το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του τόξου και της εφαπτομένης στο σημείο επαφής. Οσοδήποτε και αν μεγαλώσει μια τέτοια γωνία δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και οποιαδήποτε τέμνουσα του τόξου στο σημείο τομής. Ένα τέτοιο μέγεθος *α*, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό *ν* παραμένει μικρότερο του μεγέθους *β*, ονομάζεται *ενεργεία απειροστό* ως προς το *β*, ή αντίθετα, το *β* λέγεται *ενεργεία άπειρο* μέγεθος ως προς το *α*.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• *Μέγεθος* λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Στη Γεωμετρία έχουμε τα ***γεωμετρικά μεγέθη***.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***υποδιαίρεση*** του ΑΒ, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, ώστε $ΓΔ = \frac{ΑΒ}{ν}$.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***γινόμενο*** του ΑΒ επί το ***θετικό ρητό*** αριθμό $q = \frac{μ}{ν}$ (μ>0, ν>0), αν είναι άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{ΑΒ}{ν}$.

• Αν για δυο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει ρητός $q = \frac{μ}{ν}$ τέτοιος, ώστε ΓΔ = qΑΒ, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα*** και ο αριθμός $q = \frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων.

• Μια κοινή υποδιαίρεση $ΚΛ = \frac{ΑΒ}{ν} = \frac{ΓΔ}{μ}$ λέγεται και ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ. Δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακέραια πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.

• Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται ***ασύμμετρα*** και ο λόγος τους είναι ένας ***άρρητος*** αριθμός.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ, λέγονται ***ανάλογα*** προς τα τμήματα β, δ όταν είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$

• ***Αναλογία*** τμημάτων λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, όπου α, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα.

• ***Μέτρο*** ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι ο λόγος του α προς ένα άλλο τμήμα που παίρνουμε αυθαίρετα ως ***μονάδα μέτρησης***. Έτσι:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων.

• Αν για τα διαφορετικά συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ$, τότε λέμε ότι το ***Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ*** σε λόγο λ.

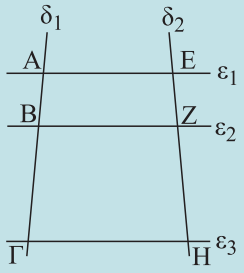
- Το Μ διαιρεί ***εσωτερικά*** ή ***εξωτερικά*** το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν το Μ είναι αντίστοιχα μεταξύ των Α και Β ή στην προέκταση του ΑΒ.
- Το σημείο Μ που διαιρεί ή εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ είναι ***μοναδικό***.

• Θεώρημα Θαλή

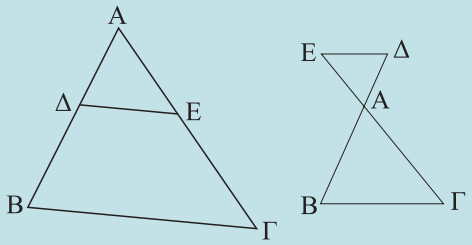
- Τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες:

Αν $ε_1//ε_2//ε_3$,τότε $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΑΓ}{ΕΗ}$.

Αντίστροφο: Αν $ε_1//ε_2$ και $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$, τότε $ΓΗ//ε_1//ε_2$.



- Στο τρίγωνο



Αν ΔΕ//ΒΓ, τότε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$ και $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Αντίστροφο: Αν $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$, τότε ΔΕ//ΒΓ.

• Γεωμετρικές κατασκευές

– Κατασκευή τετάρτης αναλόγου

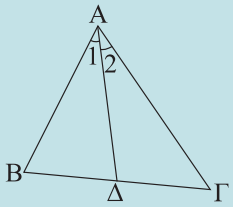
– Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο

• Συζυγή αρμονικά

Δύο σημεία Γ και Δ που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β.

• Θεωρήματα διχοτόμων

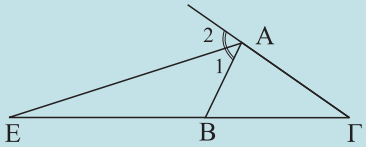
Εσωτερικής διχοτόμου



ΑΔ διχοτόμος $\Leftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$ΔΒ = \frac{αγ}{β+γ}$, $ΔΓ = \frac{αβ}{β+γ}$

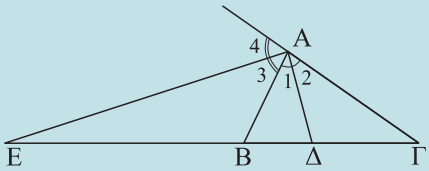
Εξωτερικής διχοτόμου



ΑΕ εξωτ. διχοτόμος $\Leftrightarrow \frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$ΕΒ = \frac{αγ}{β-γ}$, $ΕΓ = \frac{αβ}{β-γ}$

• Τα ίχνη Δ και Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι σημεία συζυγή αρμονικά ως προς τα Β και Γ.



• ***Απολλώνιος κύκλος*** ως προς τα σημεία Α και Β λέγεται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, όπου τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Όταν έχουμε αναλογίες της μορφής $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots$ θέτουμε

  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

  (**Ασκήσεις:** §7.6 Εμπέδωσης 1, 3, Αποδεικτικές 1)

- Αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή σε τρίγωνο ή τραπέζιο προκύπτουν παράλληλες ευθείες.
  (**Ασκήσεις:** §7.7 Εμπέδωσης 5, 6, Αποδεικτικές 3, 6)

- Αν για δύο τμήματα α, β ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{x}$, όπου x κατάλληλο τμήμα (ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y}$ με x = y) τότε α = β.

  (**Ασκήσεις:** §7.7 Εμπέδωσης 7, Αποδεικτικές 7)

- Σε τρίγωνο ΑΒΓ αν οι ημιευθείες ΑΔ, ΑΕ είναι αντίστοιχα η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ τα Δ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.
  (**Ασκήσεις:** §7.8 –7.9 Εμπέδωσης 7, Σύνθετα 1)

§ 7.1. - 7.6.

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Έστω ότι $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \lambda$ τότε $\hat{A} = 4\lambda$, $\hat{B} = 3\lambda$ και $\hat{\Gamma} = 2\lambda$

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $9\lambda = 180^\circ \Leftrightarrow \lambda = 20^\circ$.

Άρα $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$

2. Έστω $\hat{\varphi}$ η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$. Τότε:

$\frac{\hat{\omega}}{\hat{\varphi}} = \frac{1}{3}$ η $\hat{\varphi} = 3\hat{\omega}$. Αλλά $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ$ η $4\hat{\omega} = 180^\circ$ η $\hat{\omega} = 45^\circ$

3. Έστω ότι $\frac{\alpha}{6} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3} = \lambda$ τότε $\alpha=6\lambda$, $\beta=4\lambda$ και $\gamma=3\lambda$

Αλλά $\alpha + \beta + \gamma = 65\text{cm}$, οπότε $13\lambda = 65\text{cm} \Leftrightarrow \lambda = 5\text{cm}$

Άρα $\alpha=30\text{cm}$, $\beta=20\text{cm}$, $\gamma=15\text{cm}$

Αποδεικτικές ασκήσεις

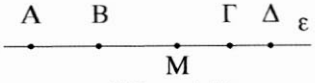
1. Εστω $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2} = \lambda$ τότε $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2\lambda$ $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 3\lambda$ $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 4\lambda$

Αλλά $\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 360^\circ$ (4 ορθές), οπότε $9\lambda = 360^\circ \Leftrightarrow \lambda = 40^\circ$

Άρα $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 80^\circ$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 160^\circ$.

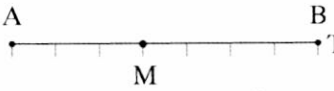
Επομένως $\hat{\hat{A}} = 100^\circ$ $\hat{B} = 60^\circ$ $\hat{\Gamma} = 20^\circ$

2.



Πρέπει $\frac{MA}{M\Delta} = \frac{MB}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA + M\Delta} = \frac{MB}{MB + M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{MA}{20} = \frac{MB}{12} \Leftrightarrow 12MA = 20MB \Leftrightarrow$

$12(MB + AB) = 20MB \Leftrightarrow 8MB = 12AB \Leftrightarrow MB = 9$

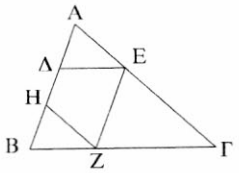
3. 

Έστω σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο ώστε: $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$

Τότε $\frac{MA}{MA + MB} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{3}{7} \Rightarrow MA = \frac{3}{7}AB$. Διαιρούμε το ΑΒ=α σε 7 ίσα μέρη και το άκρο του τρίτου από την αρχή τμήματος είναι το ζητούμενο σημείο.

§ 7.7.

Ασκήσεις εμπέδωσης



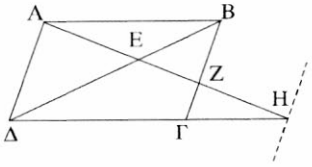
1. i) Έχουμε: $\Delta E || B\Gamma$: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ (1)

$EZ || AB$: $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$ (2) και

$ZH || A\Gamma$: $\frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{HB}{HA}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$

ii) Έχουμε: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta A + \Delta B} = \frac{HB}{HA + HB} \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{AB} = \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow \Delta A = HB$

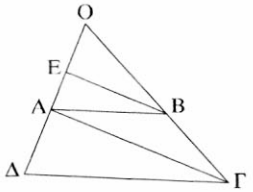


2. i) Έχουμε: $Z\Gamma || A\Delta$: $\frac{AZ}{AH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta H} = \frac{AB}{\Delta H}$ $(\Delta\Gamma = AB)$

ii) Έχουμε:

$A\Delta || BZ$: $\frac{AE}{EZ} = \frac{\Delta E}{EB}$ και $AB || \Delta H$: $\frac{EH}{AE} = \frac{\Delta E}{EB}$.

Αρα $\frac{AE}{EZ} = \frac{EH}{AE} \Leftrightarrow AE^2 = EZ \cdot EH$



3. Αρκεί $\frac{O\Delta}{OA} = \frac{OA}{OE}$. Έχουμε:

$AB || \Gamma\Delta$: $\frac{O\Delta}{OA} = \frac{O\Gamma}{OB}$ και

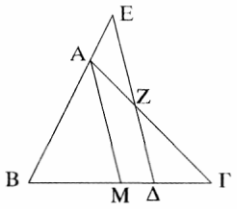
$BE || A\Gamma$: $\frac{OA}{OE} = \frac{O\Gamma}{OB}$

Άρα: $\frac{O\Delta}{OA} = \frac{OA}{OE}$

4. Έχουμε:

$AM || \Delta E$: $\frac{AE}{AB} = \frac{M\Delta}{BM}$ και $\Delta Z || AM$: $\frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$

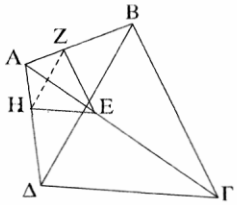
Άρα: $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma}$ $(BM = M\Gamma)$ ή $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{A\Gamma}$



5. Αρκεί: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Delta}$ (αντίστροφο Θαλή στο τρίγ. ΑΒΔ)

Έχουμε: $ZE // B\Gamma$: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AE}{E\Gamma}$ και $EH // \Delta\Gamma$: $\frac{AH}{H\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma}$.

Άρα: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AE}{E\Gamma}$

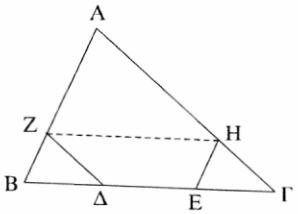


6. Αρκεί: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$ (αντίστροφο Θαλή στο τριγ. ΑΒΓ)

Έχουμε: $Z\Delta || A\Gamma$: $\frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$

και $EH || AB$: $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{BE}{E\Gamma}$. Αρα $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$

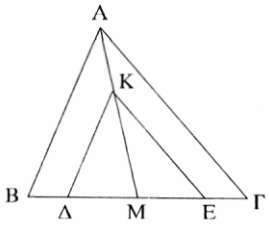
γιατί $B\Delta = E\Gamma$ και $BE = \Delta\Gamma$



7. Έχουμε: $\Delta K // AB$: $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{MK}{MA}$

και $KE // A\Gamma$: $\frac{ME}{M\Gamma} = \frac{MK}{MA}$.

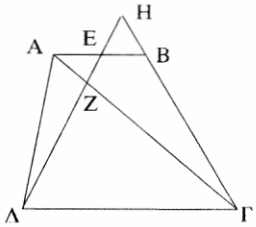
Άρα $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{ME}{M\Gamma}$, οπότε $M\Delta = ME$ $(MB = M\Gamma)$



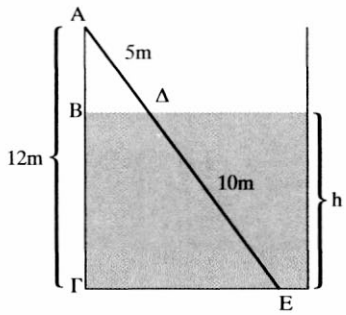
8. Αρκεί: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$. Έχουμε: $AE || \Delta\Gamma$: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{AE}{\Delta\Gamma}$

και $EB || \Delta\Gamma$: $\frac{H\Delta}{HE} = \frac{EB}{\Delta\Gamma}$

Άρα: $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$ $(AE = EB)$, οπότε τα Z, H είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.



9. Έχουμε ΒΔ//ΓΕ: $\frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$, οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων παίρνουμε $\frac{h}{10m} = \frac{12m}{15m} \Leftrightarrow h = 8m$

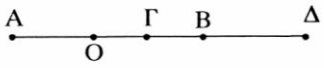


Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Έστω ότι το Γ είναι μεταξύ των Ο και Β.

Τότε: $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} > 1$. Αλλά $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} > 1$.

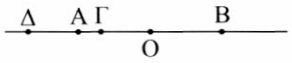
Επομένως ΔΑ>ΔΒ



Έστω ότι το Γ είναι μεταξύ των Ο και Α.

Τότε: $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} < 1$. Αλλά $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} < 1$.

Επομένως ΔΑ<ΔΒ

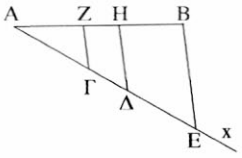


2. Έχουμε $4x = 6y = 3ω \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{ω}{4}$

Παίρνουμε αυθαίρετα ευθ. τμήμα μ. Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Ax και παίρνουμε σ' αυτή τα διαδοχικά τμήματα ΑΓ=3μ, ΓΔ=2μ, ΔΕ=4μ. Ενώνουμε το Ε με το Β και φέρουμε ΓΖ//ΒΕ και ΔΗ//ΒΕ. Τότε:

$$\frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{ΖΗ}{ΓΔ} = \frac{ΗΒ}{ΔΕ} \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{3μ} = \frac{ΖΗ}{2μ} = \frac{ΗΒ}{4μ}$$

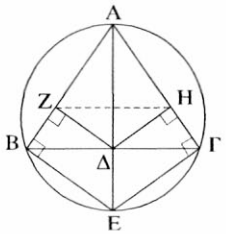
Άρα ΑΖ=x, ΖΗ=y και ΗΒ=ω.



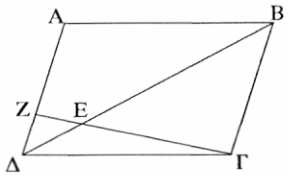
3. Αρκεί $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΗ}{ΗΓ}$ (αντίστροφο Θαλή στο τριγ. ΑΒΓ).

Επειδή ΑΕ διάμετρος είναι $A\hat{B}E = A\hat{Γ}E = 90^\circ$.

Άρα ΒΕ||ΔΖ, οπότε $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΕ}$ και ΓΕ||ΔΗ, οπότε $\frac{ΑΗ}{ΗΓ} = \frac{ΑΔ}{ΔΕ}$. Επομένως $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΗ}{ΗΓ}$



4. Έχουμε ΔΖ//ΒΓ:

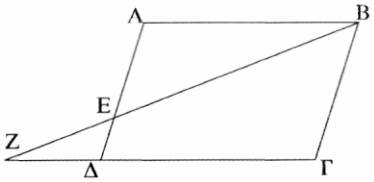


$\frac{ΔΕ}{ΕΒ} = \frac{ΔΖ}{ΒΓ}$ η $\frac{ΔΕ}{ΕΒ} = \frac{ΔΖ}{ΑΔ}$ (ΒΓ = ΑΔ) ή

$\frac{ΔΕ}{ΔΕ + ΕΒ} = \frac{ΔΖ}{ΔΖ + ΑΔ}$ ή $\frac{ΔΕ}{ΕΒ} = \frac{ΔΖ}{ΔΖ + ΔΖ + ΑΖ}$ ή

$\frac{1}{5} = \frac{ΔΖ}{2ΔΖ + ΑΖ}$ οπότε ΑΖ = 3ΔΖ

5. Έχουμε: ΔΕ//ΒΓ:

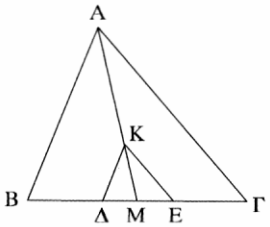


$\frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΖΒ}{ΖΕ} \Leftrightarrow \frac{ΔΑ}{ΔΕ} = \frac{ΖΒ}{ΖΕ}$ (ΒΓ = ΑΔ) και

$\frac{ΔΓ}{ΔΖ} = \frac{ΕΒ}{ΖΕ}$.

Αρα $\frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = \frac{ΖΒ - ΕΒ}{ΖΕ} = \frac{ΖΕ}{ΖΕ} = 1$

6. i) Έχουμε ΔΚ//ΑΒ: $\frac{ΜΔ}{ΔΒ} = \frac{ΜΚ}{ΑΚ}$.



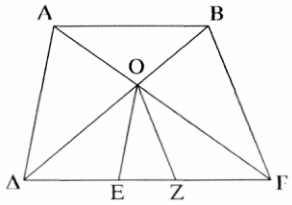
Αλλά $ΜΔ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{ΒΔ}{2}$ οπότε $\frac{ΜΚ}{ΑΚ} = \frac{1}{2}$

Άρα Κ βαρύκεντρο του ΑΒΓ.

ii) Έχουμε: $ΜΕ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{ΕΓ}{2}$, οπότε $\frac{ΜΕ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα $\frac{ΜΚ}{ΑΚ} = \frac{ΜΕ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$, οπότε ΚΕ / /ΑΓ

7. Έχουμε:



ΟΕ / /ΑΔ: $\frac{ΔΕ}{ΔΓ} = \frac{ΑΟ}{ΑΓ}$ (1) και

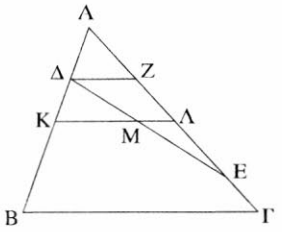
ΟΖ / /ΒΓ: $\frac{ΖΓ}{ΔΓ} = \frac{ΒΟ}{ΒΔ}$ (2)

Αλλά ΑΒ//ΓΔ, οπότε $\frac{ΑΟ}{ΑΓ} = \frac{ΒΟ}{ΒΔ}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\frac{ΔΕ}{ΔΓ} = \frac{ΖΓ}{ΔΓ} \Leftrightarrow ΔΕ = ΖΓ$

Σύνθετα θέματα

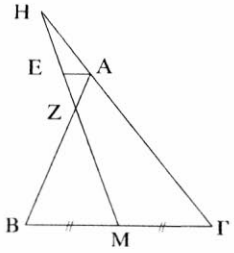
1. Εστω Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΚΛ//ΒΓ. Τότε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΓ}}$, οπότε $\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΓ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}} \Leftrightarrow$



$$\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΖ}+\text{ΖΓ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΓ}+\text{ΕΑ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΓ}} \Leftrightarrow \text{ΑΖ} = \text{ΕΓ}$$

Επομένως στο τριγ. ΔΖΕ το Λ είναι το μέσο του ΖΕ και ΛΚ//ΔΖ. Άρα Μ μέσο του ΔΕ, οπότε Κ,Λ.Μ συνευθειακά.

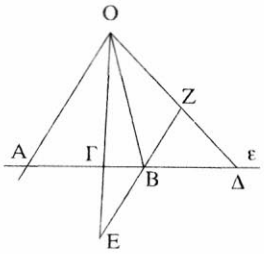
2. Φέρουμε ΑΕ//ΒΓ. Τότε $\frac{\text{ΗΑ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΜΓ}}$ και $\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΜΒ}}$.



Άρα $\frac{\text{ΗΑ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}} (\text{ΜΒ} = \text{ΜΓ})$ η $\text{ΖΑ} \cdot \text{ΗΓ} = \text{ΗΑ} \cdot \text{ΖΒ}$.

3. Έστω ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α,Β. Τότε:

$\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}}$ (1)



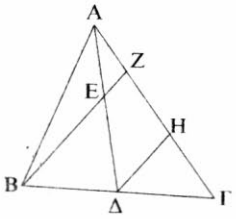
Επειδή ΒΕ//ΟΑ είναι $\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΒΕ}}$ (2) και

επειδή ΒΖ//ΟΑ είναι $\frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΒΖ}}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΒΖ}} \Leftrightarrow \text{ΒΕ} = \text{ΒΖ}$

Αντίστροφα: Έστω ΒΕ=ΒΖ τότε από (2), (3) προκύπτει ότι $\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}}$. Άρα τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β.

4. Έχουμε $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}} = \lambda$ και $\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΔ}} = \kappa$



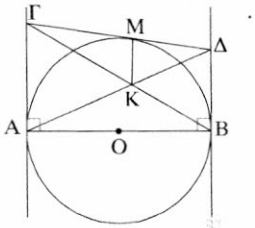
Φέρουμε ΔΗ//ΒΖ. Τότε: $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΗΓ}} \Leftrightarrow$

$$\frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΗΓ}} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΖΗ}+\text{ΗΓ}} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΖΓ}} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \quad (1)$$

Επίσης $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΗ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΗ}} = \kappa$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{AZ}{ZH}\cdot\frac{ZH}{Z\Gamma}=\frac{\kappa\lambda}{\lambda+1}\Leftrightarrow\frac{AZ}{Z\Gamma}=\frac{\kappa\lambda}{\lambda+1}.$$



5. Επειδή ΔΒ⊥ΑΒ, ΑΓ⊥ΑΒ αρκεί ΜΚ||ΔΒ||ΑΓ.

Έχουμε: ΑΓ//ΔΒ: $\frac{K\Gamma}{KB}=\frac{A\Gamma}{\Delta B}$ (1)

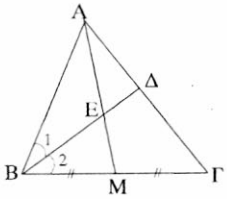
Αλλά ΑΓ=ΓΜ και ΔΒ=ΜΔ (2) (εφαπτόμενα τμήματα).

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $\frac{K\Gamma}{KB}=\frac{\Gamma M}{M\Delta}$

οπότε ΜΚ||ΔΒ (αντίστροφο Θαλή στο τριγ. ΒΓΔ).

§ 7.8 - 7.9

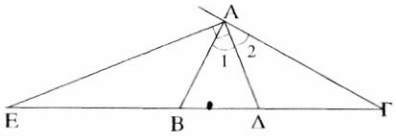
Ασκήσεις εμπέδωσης



1. Έχουμε $\overset{\Delta}{ABM}$ (ΒΕ διχ.): $\frac{AE}{EM}=\frac{AB}{BM}=\frac{AB}{\frac{B\Gamma}{2}}=2\frac{AB}{B\Gamma}$ (1)

και $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (ΒΔ διχ.): $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{B\Gamma}$ (2)

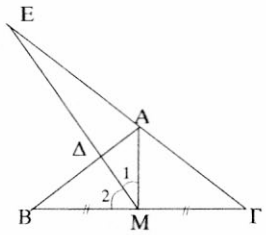
Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{AE}{EM}=2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$



2. Έχουμε $\Delta B=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{10\cdot 6}{9+6}=\frac{60}{15}=4$

και $EB=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{10\cdot 6}{9-6}=\frac{60}{3}=20$

Άρα $\Delta E=\Delta B+EB=24$



3. Έχουμε $\overset{\Delta}{AMB}$ (ΜΔ διχ.): $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{MA}{MB}$ (1) και

$\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ (ΜΕ εξωτ. διχ.): $\frac{EA}{E\Gamma}=\frac{MA}{M\Gamma}$. (2)

Αλλά ΜΒ=ΜΓ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

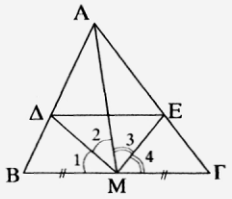
$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{E\Gamma}\Leftrightarrow EA\cdot\Delta B=E\Gamma\cdot\Delta A$

4. Έχουμε $\overset{\Delta}{AMB}$ (ΜΔ διχ.): $\frac{AΔ}{ΔB}=\frac{AM}{MB}$ και

$\overset{\Delta}{AMΓ}$ (ΜΕ διχ.): $\frac{AE}{EΓ}=\frac{AM}{MΓ}$.

Άρα $\frac{AΔ}{ΔB}=\frac{AE}{EΓ}$ (ΜΒ = ΜΓ),

οπότε ΔΕ||ΒΓ (αντίστροφο Θαλή στο τριγ. ΑΒΓ).



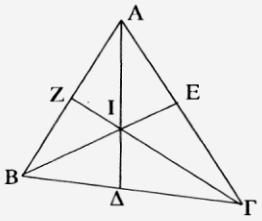
5. Επειδή ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ διχοτόμοι είναι:

$\frac{ΔB}{ΔΓ}=\frac{AB}{AΓ}$, $\frac{EΓ}{EA}=\frac{BΓ}{AB}$ και $\frac{ZA}{ZB}=\frac{AΓ}{BΓ}$

Άρα $\frac{ΔB}{ΔΓ}\cdot\frac{EΓ}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{AB}{AΓ}\cdot\frac{BΓ}{AB}\cdot\frac{AΓ}{BΓ}=1$

Αν ΑΚ, ΒΛ και ΓΜ οι εξωτερικές διχοτόμοι του τριγ. ΑΒΓ

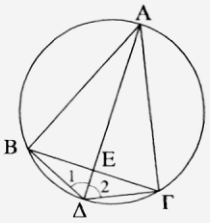
Ισχύει: $\frac{KB}{KΓ}\cdot\frac{ΛΓ}{ΛA}\cdot\frac{MA}{MB}=1$. Η απόδειξη είναι όμοια.



6. Επειδή ΑΒ=ΑΓ έχουμε $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AΓ}$, οπότε $\hat{Δ}_1=\hat{Δ}_2$.

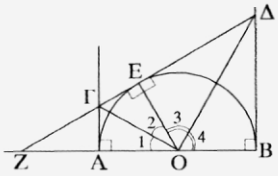
Άρα στο τριγ. ΒΔΓ (ΔΕ διχ.):

$\frac{EB}{EΓ}=\frac{ΔB}{ΔΓ}\Leftrightarrow EB\cdot ΔΓ=EΓ\cdot ΔB$



7. Έχουμε $\overset{\Delta}{OAΓ}=\overset{\Delta}{OEΓ}$ και $\overset{\Delta}{OBΔ}=\overset{\Delta}{OEΔ}$, οπότε $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ και $\hat{O}_3=\hat{O}_4$.

Άρα στο τριγ. ΟΕΖ η ΟΓ είναι εσωτερική διχοτόμος και η ΟΔ εξωτερική διχοτόμος της $\hat{O}$. Επομένως τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε,Ζ.

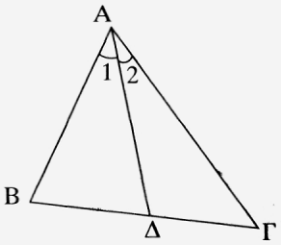


8. Έστω ΑΒ=20m, ΑΓ=36m και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Τότε $\frac{ΔB}{ΔΓ}=\frac{AB}{AΓ}\Leftrightarrow\frac{ΔB}{ΔΓ}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ (1).

Από την (1) προκύπτει ότι ΔΒ<ΔΓ.

Άρα θα είναι ΔΓ-ΔΒ=12m (2).

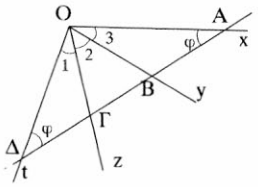
Επομένως



$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{5}{9}\Leftrightarrow\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma-\Delta B}=\frac{5}{9-5}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{\Delta B}{12m}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow \Delta B=15m\ ,$$

οπότε ΔΓ=27m και ΒΓ=ΔΒ+ΔΓ=42m.

Αποδεικτικές ασκήσεις



1. Έχουμε $\overset{\Delta}{OA\Gamma}$ (ΟΒ διχ.): $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{OA}{O\Gamma}$ (1) και

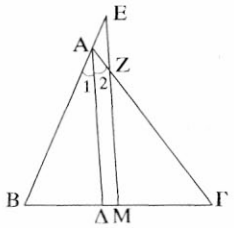
$\overset{\Delta}{OB\Delta}$ (ΟΑ εξωτ. διχοτόμος, γιατί ΟΑ⊥ΟΓ):

$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{O\Delta}{OB}$ (2)

Αλλά $\overset{\Delta}{OAB}=\overset{\Delta}{O\Gamma\Delta}$ (ΟΑ = ΟΔ, $\hat{A}=\hat{\Delta}=\hat{\varphi}$

$\hat{O}_1=\hat{O}_3=45$). Άρα ΟΒ=ΟΓ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι: $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}\Leftrightarrow AB^2=B\Gamma\cdot A\Delta$



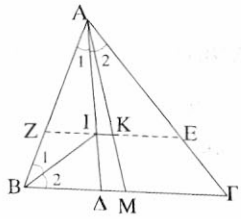
2. Έχουμε:

ΑΔ||ΕΜ: $\frac{BE}{AB}=\frac{BM}{B\Delta}\Leftrightarrow BE=\frac{AB\cdot BM}{B\Delta}$ (1) και

ΖΜ||ΑΔ: $\frac{\Gamma Z}{A\Gamma}=\frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow A\Gamma\cdot\Gamma M=\Gamma Z\cdot\Gamma\Delta$ (2)

Επίσης $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (ΑΔ διχ.): $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{AB}{B\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (3)

Από (1), (2), (3) επειδή ΒΜ=ΓΜ προκύπτει ότι ΒΕ=ΓΖ



3. i) Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ (ΒΙ διχ.): $\frac{AI}{I\Delta}=\frac{AB}{B\Delta}=\frac{\gamma}{B\Delta}$

Αλλά $B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, οπότε $\frac{AI}{I\Delta}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$

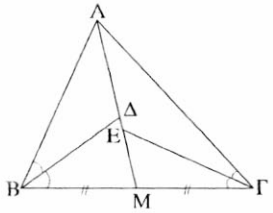
ii) α) Επειδή β+γ=α είναι $\frac{AI}{I\Delta}=2$. Αλλά Κ βαρύκεντρο,

οπότε $\frac{AK}{KM}=2$.

Επομένως $\frac{AI}{I\Delta}=\frac{AK}{KM}$, οπότε ΙΚ//ΒΓ (αντίστροφο Θαλή στο τριγ. ΑΔΜ)

β) Έχουμε ΖΕ||ΒΓ, οπότε $\frac{ZE}{B\Gamma} = \frac{AK}{AM} \Leftrightarrow \frac{ZE}{\alpha} = \frac{\frac{2}{3}AM}{AM} \Leftrightarrow \frac{ZE}{\alpha} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$ZE = \frac{2\alpha}{3} \Leftrightarrow ZE = \frac{\beta+\gamma}{3}$ (αφού β+γ=2α).

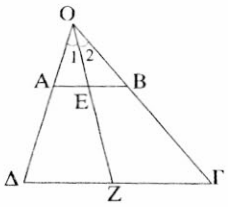


4. Έχουμε $\overset{\Delta}{ABM}$ (ΒΔ διχ.): $\frac{A\Delta}{\Delta M} = \frac{AB}{BM}$ και

$\overset{\Delta}{A\Gamma M}$ (ΓΕ διχ.): $\frac{AE}{EM} = \frac{A\Gamma}{\Gamma M}$ Άρα:

$\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} = \frac{AB + A\Gamma}{\frac{B\Gamma}{2}}$ (γιατί $BM=\Gamma M=\frac{B\Gamma}{2}$) =

$= 2\frac{AB + A\Gamma}{B\Gamma} > 2$, διότι ΑΒ+ΑΓ>ΒΓ (τριγωνική ανισότητα)



5. i) Έχουμε $\overset{\Delta}{O\Delta\Gamma}$ (ΟΖ διχ.): $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}$ (1)

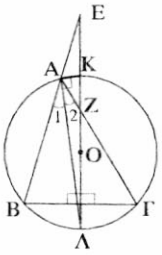
και ΑΒ//ΓΔ: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$

ii) Όμοια $\overset{\Delta}{OAB}$ (ΟΕ διχ.): $\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB}$

και ΑΒ//ΓΔ: $\frac{OA}{OB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$. Άρα $\frac{EA}{EB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$

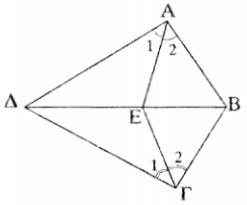
Σύνθετα θέματα



1. Επειδή ΚΛ διάμετρος έχουμε $K\hat{A}\Lambda = 90^\circ$ (1). Επίσης, αφού ΚΛ⊥ΒΓ, το Λ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι οι ΑΚ και ΑΛ είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγ. ΕΑΖ. Άρα τα Ε,Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ,Λ.

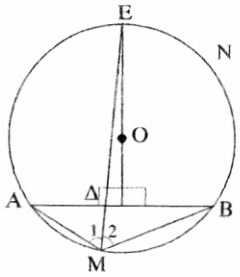
2. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται σε σημείο Ε της ΒΔ τότε: $\frac{E\Delta}{EB} = \frac{A\Delta}{AB}$ και $\frac{E\Delta}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$.



Άρα $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$

***Αντίστροφα*:** Αν έχουμε $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$ ή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$ θα δείξουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στη ΒΔ. Έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΒΔ στο Ε. Τότε: $\frac{E\Delta}{EB} = \frac{A\Delta}{AB}$, οπότε από την υπόθεση $\frac{E\Delta}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$. Άρα η ΓΕ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ (στο τρίγ. ΒΓΔ).

3. Έστω Μ το ζητούμενο σημείο. Αν φέρουμε τη διχοτόμο ΜΔ του τριγ. ΑΜΒ και την προεκτείνουμε τέμνει τον κύκλο στο Ε. Επειδή $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ το Ε θα είναι το μέσο του τόξου $A\overset{\frown}{N}B$.

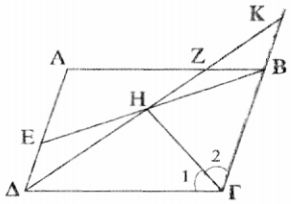


Επίσης $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Άρα τόσο το Δ, όσο και το Ε προσδιορίζονται.

***Κατασκευή*:** Διαιρούμε τη χορδή ΑΒ σε τμήματα ΑΔ, ΔΒ τέτοια ώστε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$. Φέρουμε κάθετη στο μέσο της ΑΒ, η οποία διχοτομεί το τόξο $A\overset{\frown}{N}B$ στο Ε. Η ΕΔ προεκτεινόμενη ορίζει το σημείο Μ του τόξου ΑΒ, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Πράγματι $\frac{MA}{MB} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$ εκ κατασκευής (αφού ΜΔ διχοτόμος του τριγ. ΑΜΒ).

4. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει την ΒΓ στο Κ.



Αρκεί $\frac{HK}{H\Delta} = \frac{K\Gamma}{\Delta\Gamma}$ Έχουμε:

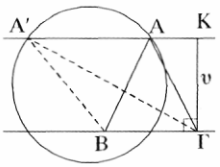
ΔΕ//ΒΚ, οπότε $\frac{HK}{H\Delta} = \frac{KB}{\Delta E} = \frac{KB}{ZB}$ (1) (ΔΕ = ΖΒ)

Επίσης ΖΒ//ΔΓ, οπότε

$\frac{K\Gamma}{KB} = \frac{\Delta\Gamma}{ZB}$ η $\frac{KB}{ZB} = \frac{K\Gamma}{\Delta\Gamma}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{ΗΚ}{ΗΔ} = \frac{ΚΓ}{ΔΓ}$, οπότε η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Γ}Δ$.

5. Η άγνωστη κορυφή Α του τριγώνου πρέπει:



i) Να απέχει από τη ΒΓ απόσταση υ, άρα θα ανήκει σε ευθεία παράλληλη της ΒΓ και σε απόσταση ίση με υ από αυτή.

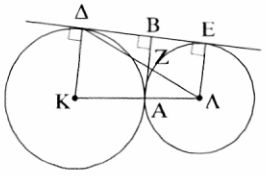
ii) Να ικανοποιεί τη σχέση $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν}$, άρα θα ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΔΕ, όπου τα Δ και Ε διαιρούν το ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $λ = \frac{μ}{ν}$.

Κατασκευή. Ορίζουμε την ΒΓ=α. Φέρουμε ΓΚ⊥ΒΓ ώστε ΓΚ=υ και από το Κ φέρουμε Κx//ΒΓ. Διαιρούμε το ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $λ = \frac{μ}{ν}$ και βρίσκουμε τα Δ και Ε. Τέλος γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ οπότε:

Άν το ύψος υ είναι μικρότερο από την ακτίνα του κύκλου έχουμε δύο λύσεις (τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′ΒΓ του σχήματος), άν το ύψος υ είναι ίσο με την ακτίνα μια λύση ενώ άν δεν είναι μεγαλύτερο καμμία λύση.

Γενικές ασκήσεις

1. Έχουμε ΚΔ⊥ΔΕ, ΛΕ⊥ΔΕ. Άρα ΚΔ//ΑΒ//ΛΕ.



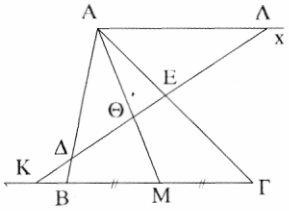
Επομένως ΑΖ//ΚΔ:

$\frac{ΑΖ}{ΚΔ} = \frac{ΛΑ}{ΚΛ} \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{R} = \frac{R}{R+ρ} \Leftrightarrow ΑΖ = \frac{R \cdot ρ}{R+ρ}$ (1) και

ΖΒ//ΛΕ: $\frac{ΖΒ}{ΛΕ} = \frac{ΔΖ}{ΔΛ} = \frac{ΚΑ}{ΚΛ}$ ή

$\frac{ΖΒ}{ρ} = \frac{R}{R+ρ} \Leftrightarrow ΖΒ = \frac{R \cdot ρ}{R+ρ}$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι: $ΑΒ = ΑΖ + ΖΒ = \frac{2R \cdot ρ}{R+ρ}$

2. Φέρουμε Αx//ΒΓ. Άν η ΔΕ τέμνει τις ΒΓ, Αx στα Κ, Λ αντίστοιχα έχουμε:



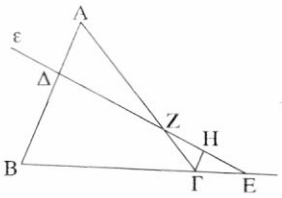
ΑΛ//ΚΒ: $\frac{ΔΒ}{ΔΑ} = \frac{ΚΒ}{ΑΛ}$ (1) και ΑΛ//ΚΓ: $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΚΓ}{ΑΛ}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta B}{\Delta A}+\frac{E\Gamma}{EA}=\frac{KB+K\Gamma}{A\Lambda}=\frac{KB+KM+M\Gamma}{A\Lambda}=\frac{2KM}{A\Lambda}=2\frac{\Theta M}{A\Theta}$$

(γιατί $\frac{KM}{A\Lambda}=\frac{\Theta M}{A\Theta}$) $=2\cdot\frac{1}{2}=1$ (αφού Θ βαρύκεντρο).

3. i) Φέρουμε ΓΗ//ΑΒ. Τότε:



$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{\Delta B}{\Gamma H}$ και $\frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{\Gamma H}{\Delta A}$, οπότε

$\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{\Delta B}{\Gamma H}\cdot\frac{\Gamma H}{\Delta A}\Leftrightarrow\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$

***Αντίστροφα*:** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ σημεία των ευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα (έστω Δ, Ζ εσωτερικά των ΑΒ, ΑΓ και Ε εξωτερικό του ΒΓ) τέτοια ώστε: $\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$. Τότε τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

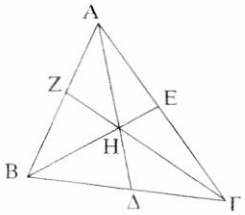
Η Ευθεία ΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ε΄ (γιατί άν ΔΖ//ΒΓ τότε $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{ZA}{Z\Gamma}$ οπότε από την υπόθεση θα είναι ΕΒ=ΕΓ άτοπο).

Για το τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία ΔΕ΄ έχουμε (Θεωρ. Μενελάου) $\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{E'B}{E'\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$. Αλλά από υπόθεση είναι: $\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$ οπότε $\frac{E'B}{E'\Gamma}=\frac{EB}{E\Gamma}$.

Άρα τα Ε, Ε΄ ταυτίζονται (γιατί διαιρούν εξωτερικά το ΒΓ στον ίδιο λόγο).

Παρατηρήσεις:

1) Από τα σημεία Δ, Ε, Ζ το ένα ή και τα τρία θα είναι σημεία των προεκτάσεων των πλευρών (Θεώρημα Pasch)



2) Αν π..χ. Δ,Ε,Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τότε $\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1$ χωρίς τα Δ, Ε, Ζ να είναι συνευθειακά.

ii) Για το τρίγωνο ΑΒΔ και την ευθεία ΖΓ έχουμε (Θεωρ. Μενελάου) $\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{H\Delta}{HA}=1$ (1)

Όμοια για το τρίγωνο ΑΓΔ και την ευθεία ΕΒ είναι

$\frac{HA}{H\Delta}\cdot\frac{B\Delta}{B\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}=1$ (2)

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$

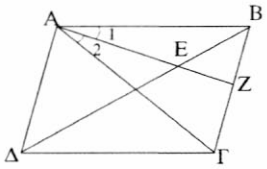
Αντίστροφα. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ, σημεία των **πλευρών** του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Άν ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$ τότε οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν.

Η απόδειξη όμοια με το (i) (έστω Η η τομή των ΒΕ, ΓΖ και Δ΄ η τομή της ΑΗ με την ΒΓ. Τότε....)

Σχόλιο:

Αν από τα σημεία Δ, Ε, Ζ το ένα είναι εσωτερικό και τα άλλα δύο εξωτερικά (στις προεκτάσεις) των πλευρών, τότε οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

4. Επειδή ΑΔ//ΒΖ έχουμε: $\frac{EA}{EZ} = \frac{A\Delta}{BZ}$ (1).

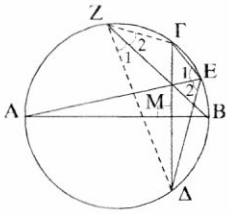


Επίσης $\overset{\Delta}{ABΓ}$ (ΑΖ διχ.): $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{Z\Gamma}{BZ}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta - Z\Gamma}{BZ} = \frac{B\Gamma - Z\Gamma}{BZ} = \frac{BZ}{BZ} = 1$$

5. Επειδή ΑΒ⊥ΓΔ έχουμε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{A\Delta}$ και $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B\Delta}$



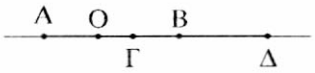
οπότε $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$.

Άρα: $\overset{\Delta}{ΓEΔ}$ (ΕΜ διχ.): $\frac{M\Gamma}{M\Delta} = \frac{E\Gamma}{E\Delta}$ (1) και $\overset{\Delta}{ΓZΔ}$ (ΖΜ διχ.):

$\frac{M\Gamma}{M\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{E\Gamma}{E\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta} \Leftrightarrow E\Gamma \cdot Z\Delta = E\Delta \cdot Z\Gamma$

6.



i) Έχουμε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{O\Gamma + OA}{OB - O\Gamma} = \frac{O\Delta + OA}{O\Delta - OB} \Leftrightarrow \frac{O\Gamma + OA}{OA - O\Gamma} = \frac{O\Delta + OA}{O\Delta - OA} (OA = OB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow OA^2 = O\Gamma \cdot O\Delta$$

ii) Έχουμε : $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB - A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Delta - AB} \Leftrightarrow$

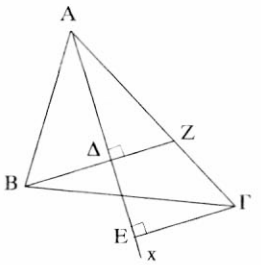
$$2ΑΓΑΔ = ΑΒΑΔ + ΑΒ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow \frac{2}{ΑΒ} = \frac{1}{ΑΓ} + \frac{1}{ΑΔ}$$

***Σημείωση*:** Τα Γ, Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.

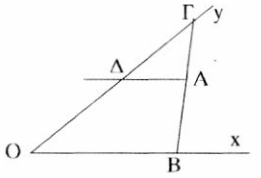
7. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ τότε επειδή ΒΖ//ΓΕ έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ} \quad η \quad \frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν} \quad η \quad ΑΖ = \frac{μ}{ν}ΑΓ.$$

Επομένως το Ζ προσδιορίζεται και η Αx ορίζεται ως κάθετη της ΒΖ από το Α.



8. α) ***Ανάλυση*:** Έστω ΒΓ η ζητούμενη ευθεία και ότι η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Δ. Τότε το Δ είναι σταθερό (ορίζεται) και επειδή ΑΒ=ΑΓ το Δ είναι το μέσο του ΟΓ. Άρα ορίζεται και το Γ.



***Κατασκευή*:** Φέρουμε από το Α παράλληλη στην Οx, βρίσκουμε το Δ και ορίζουμε το Γ πάνω στην Οy ώστε ΟΔ=ΟΓ. Η ζητούμενη ευθεία είναι η ΑΓ (που τέμνει την Οx στο Β).

Η ***απόδειξη*** είναι απλή.

β) Έχουμε: $ΑΒ = \frac{2}{3}ΒΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΓ - ΑΒ} = \frac{2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = 2$

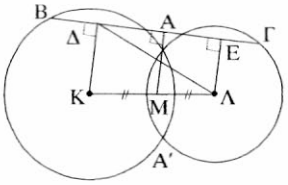
Φέρουμε πάλι ΑΔ//Οx οπότε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΟΔ}{ΔΓ}$ ή $\frac{ΟΔ}{ΔΓ} = 2$ ή $ΔΓ = \frac{ΟΔ}{2}$

Άρα ορίζεται το σημείο Γ και συνεχίζουμε όπως στο (α)

γ) Όμοια έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΟΔ}{ΔΓ} = \frac{μ}{ν} \Leftrightarrow ΔΓ = \frac{ν}{μ}ΟΔ.$

Άρα το ΔΓ κατασκευάζεται. Η συνέχεια όπως στο (α).

9. α) ***Ανάλυση*:** Έστω ΒΓ η ζητούμενη ευθεία ώστε ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε τα αποστήματα ΚΔ, ΛΕ οπότε ΑΔ=ΑΕ. Επειδή ΚΔ//ΛΕ αν Μ το μέσο του ΚΛ τότε, από το αντίστροφο του Θαλή, θα είναι ΑΜ//ΚΔ//ΛΕ. Άρα ΑΜ⊥ΒΓ, οπότε η ΒΓ κατασκευάζεται.



***Κατασκευή*:** Ορίζουμε το Μ ως μέσο του ΚΛ και γράφουμε

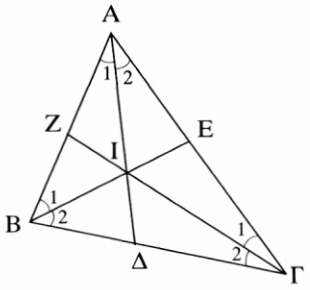
ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Α, που τέμνει τους κύκλους στα Β και Γ.

***Απόδειξη*:** Φέρουμε τα αποστήματα ΚΔ, ΛΕ, οπότε ΚΔ//ΑΜ//ΛΕ.

Άρα $\frac{MK}{M\Lambda} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow A\Delta = AE$ (αφού ΜΚ=ΜΛ)$\Rightarrow$ΑΒ=ΑΓ

β) Ανάλογα με το (α) ορίζουμε το σημείο Μ το οποίο διαιρεί εσωτερικά την ΚΛ σε λόγο $\frac{MK}{M\Lambda} = \frac{3}{4}$ και γράφουμε ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Α, που τέμνει τους κύκλους στα Β και Γ.

10. Έχουμε $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ (ΒΙ διχ): $\frac{IA}{I\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$.



Άρα $\frac{IA}{I\Delta} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}$ (1) όμοια

$\frac{IB}{IE} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}$ (2) και

$\frac{I\Gamma}{IZ} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$ (3)

Από (1), (2), (3) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{IA}{I\Delta} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) \geq 6$$

(γιατί το άθροισμα δύο αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ομοιότητα

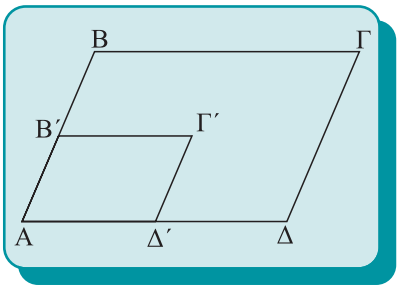
Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι ιδιότητες των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και ειδικότερα των όμοιων τριγώνων για τα οποία διατυπώνονται κατάλληλα κριτήρια ομοιότητας. Η ομοιότητα επεκτείνεται στο σύνολο των στοιχείων των ευθύγραμμων σχημάτων ενώ δίνονται πρακτικές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα και σημειώνεται ότι αποτελεί βασικό συνδετικό κρίκο Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Τέλος, παρουσιάζεται η στενή σχέση της ομοιότητας με την τριγωνομετρία.

Ναός στο Khajuraho της Βορειοκεντρικής Ινδίας, 10ος - 11ος αιώνας.

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από τα μέσα Β΄ και Δ΄ των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΑΒ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ΄. Τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒ΄Γ΄Δ΄ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του ΑΒΓΔ, ενώ ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Delta'}{A\Delta}=\frac{1}{2}.$$

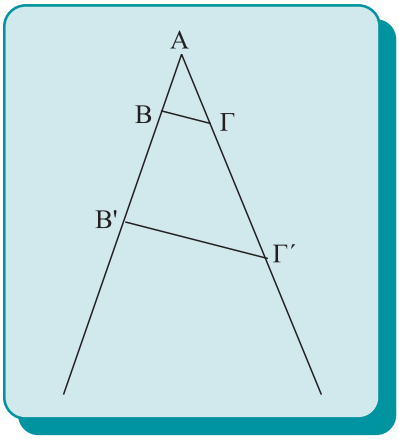


Σχήμα 1

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ προς τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Β΄ στην προέκταση της ΑΒ, έτσι, ώστε ΑΒ΄= 3ΑΒ. Από το Β΄ φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά ΒΓ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Γ΄.

Τότε παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=3.$$



Σχήμα 2

Τα δύο παραλληλόγραμμα, όπως και τα δύο τρίγωνα που κατασκευάσθηκαν προηγουμένως λέγονται ***όμοια***, ενώ ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους (δηλαδή των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες) λέγεται ***λόγος ομοιότητας***. Γενικότερα για τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

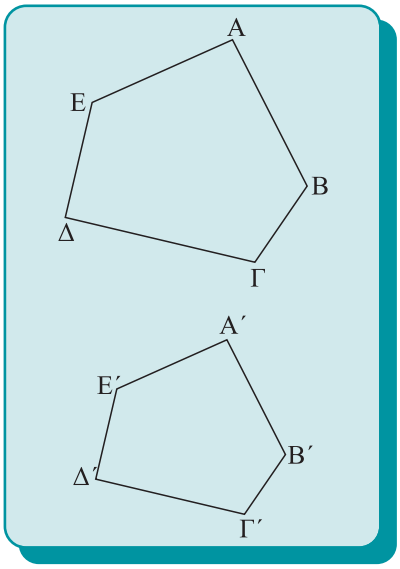
Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με ≈ .

Θεώρημα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (ανάλογα αποδεικνύεται για ευθύγραμμα σχήματα



Σχήμα 3

με περισσότερες κορυφές). Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'E'}{\Delta E}=\frac{E'A'}{EA}=\lambda,$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρανομαστών ισούται με λ, δηλαδή:

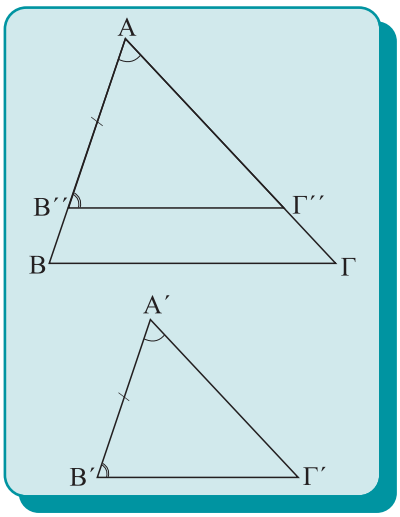
$$\frac{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}=\lambda.$$

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ομοιότητα των τριγώνων, καθώς αποδεικνύεται (εφαρμογή 3) ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



Σχήμα 4

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, οπότε και $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $A'B'<AB$, επομένως υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $AB''=A'B'$. Από τη Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Τότε τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού ισχύει ότι Β΄΄Γ΄΄//ΒΓ, οπότε $\frac{AB''}{AB}=\frac{A\Gamma''}{A\Gamma}=\frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}$ και η $\hat{A}$ είναι κοινή, ενώ $\hat{B}''=\hat{B}$ οπότε και $\hat{\Gamma}''=\hat{\Gamma}$.
Όμως τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, καθώς έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια.

Πορίσματα

(i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.

(ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

(iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

Θεώρημα ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.4) έτσι, ώστε $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β″ στην ΑΒ, με ΑΒ″ = Α′Β′. Από το Β″ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ″. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και ΑΒΓ είναι όμοια. Επειδή ΑΒΓ ≈ΑΒ″Γ″ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$.

Επομένως καταλήγουμε ότι $\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma'' = A'\Gamma'$.

Τελικά τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Θεώρημα ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 4), ώστε

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β″ στην ΑΒ, με ΑΒ″ = Α′Β′. Από το Β″ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ″, οπότε τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Επειδή ΑΒΓ ≈ΑΒ″Γ″ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας. Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του. Το μοντέλο αυτό θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma},$$

οπότε $A\Gamma'' = A'\Gamma'$ και $B''\Gamma'' = B'\Gamma'$.
Άρα τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

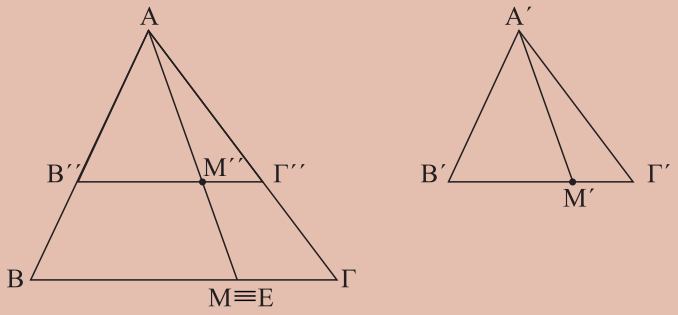
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ με λόγο ομοιότητας λ και σημεία Μ της ΒΓ, Μ′ της Β′Γ′ τέτοια, ώστε $\frac{BM}{M\Gamma} = \frac{B'M'}{M'\Gamma'}$.

Τότε ισχύει ότι $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} = \frac{\Gamma M}{\Gamma'M'} = \lambda$.

Απόδειξη

Έστω ότι $A'B' < AB$, οπότε θα υπάρχει σημείο B'' της ΑΒ τέτοιο, ώστε $AB'' = A'B'$ και σημείο Γ'' της ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Gamma'' = A'\Gamma'$, με $B''\Gamma'' // B\Gamma$. Έστω σημείο M'' της $B''\Gamma''$ τέτοιο, ώστε $B''M'' = B'M'$.
Προεκτείνουμε την AM'' ώστε να τμήσει τη ΒΓ σε σημείο Ε. Τότε τα τρίγωνα $AB''M''$ και ΑΒΕ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{B''M''}{BE} = \frac{AM''}{AE} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{B'M'}{BE} = \frac{A'M'}{AE}.$$



Σχήμα 5

Όμοια έχουμε ότι $\lambda = \frac{M'\Gamma'}{E\Gamma} = \frac{A'M'}{AE}$.

Οπότε $\frac{B'M'}{M'\Gamma'} = \frac{BE}{E\Gamma} = \frac{BM}{M\Gamma}$, συνεπώς τα Ε και Μ ταυτίζονται.

Πορισματα

(i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.

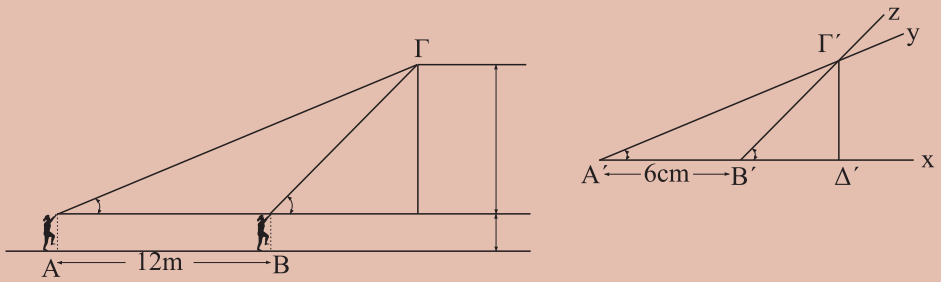
(ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.

(iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



Σχήμα 6

Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία Α και Β στο έδαφος (σχ. 6). Χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A} = 19°$ και $\hat{B} = 43°$.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο Α ως το Β, π.χ. ΑΒ=12 μέτρα . Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄=6 cm. Προεκτείνουμε την Α΄Β΄ προς το μέρος του Β΄ και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $x\hat{A}'y = 19°$ και $x\hat{B}'z = 43°$. Οι ημιευθείες Α΄y και Β΄z τέμνονται στο σημείο Γ΄. Από το σημείο Γ΄ φέρουμε την κάθετη Γ΄Δ΄ στην Α΄Β΄ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το Γ΄Δ΄ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda = \dfrac{AB}{A'B'} = 200$.

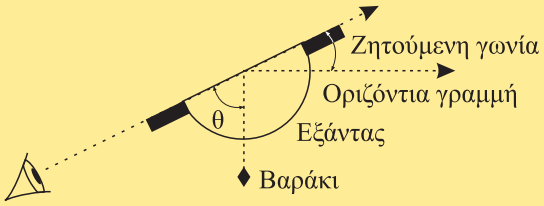
Επομένως το πραγματικό μήκος του ΓΔ είναι ΓΔ = λΓΔ΄ = 6,6 μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα.

Ο ΕΞΑΝΤΑΣ

Το διπλανό σχήμα εκφράζει τη λειτουργία του εξάντα, δηλαδή μας παρουσιάζει έναν απλό μηχανισμό για να μετράμε τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται ένα σχήμα. Για να κατασκευασθεί χρειάζεται ένα ίσιο ξύλο, ένα μοιρογνωμόνιο, μία χορδή (κιθάρας) ή πετονιά, ένα βαράκι (νήμα της στάθμης) και δύο ανθρώπους, έναν για να βλέπει το αντικείμενο και έναν για να διαβάζει τη μέτρηση.

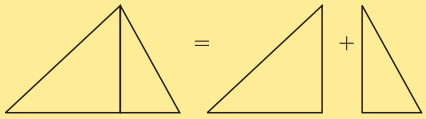


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

Παλιά οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι για να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα ήταν αρκετό να έχουν έναν πίνακα με τρίγωνα και τις διαστάσεις τους, οπότε θα αρκούσε να μελετούν τον πίνακα παρά να κατασκευάζουν μοντέλα των τριγώνων που προέκυπταν από φυσικά προβλήματα.

Παρατήρησαν ότι αρκεί ο πίνακας αυτός να έχει μόνο ορθογώνια τρίγωνα αφού κάθε τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια (σχ. 8). Ένας τέτοιος πίνακας είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων : τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 1. Πρακτικά τα αποτελέσματα από την τριγωνομετρία είναι ακριβέστερα από αυτά που προκύπτουν από μέτρηση και κατασκευή μοντέλου, όπως προηγουμένως. Ωστόσο οι τριγωνομετρικοί πίνακες δεν είναι τίποτε άλλο, παρά πίνακες όμοιων τριγώνων.



Σχήμα 8

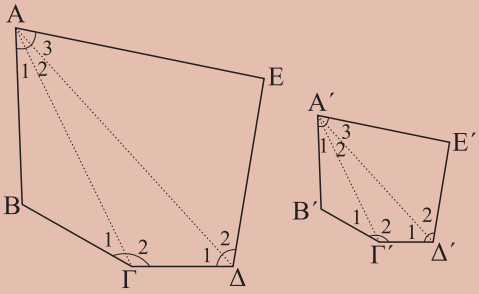
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδείξετε ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την εφαρμογή για δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′, καθώς η απόδειξη είναι ανάλογη για κάθε πολύγωνο.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ. Από τις κορυφές Α, Α′ των πενταγώνων φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ και Α′Γ′, Α′Δ′ αντίστοιχα, οπότε καθένα πεντάγωνο χωρίσθηκε σε τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ και Α′Β′Γ′, Α′Γ′Δ′, Α′Δ′Ε′ αντίστοιχα.



Σχήμα 9

Τότε έχουμε ότι ΑΒΓ ≈ Α′Β′Γ′ και ΑΔΕ ≈ Α′Δ′Ε′. Επομένως, θα είναι και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}'_1$ και $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{Α}'\text{Γ}'} = \lambda$. Τότε όμως θα έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}'_2$ (αφού $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$) και $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{Γ}'\text{Δ}'} = \lambda$.

Επομένως και τα τρίγωνα ΑΓΔ και Α′Γ′Δ′ θα είναι όμοια.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

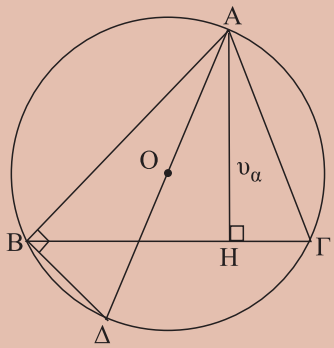
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του $υ_α$=ΑΗ. Να αποδείξετε ότι $βγ = 2Rυ_α$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{H} = 1\angle$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επομένως είναι

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AΓ}{AΔ} \quad ή \quad βγ = 2Rυ_α.$$



Σχήμα 10

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1\angle$, τότε είναι $βγ = αυ_α = 2Rυ_α$.

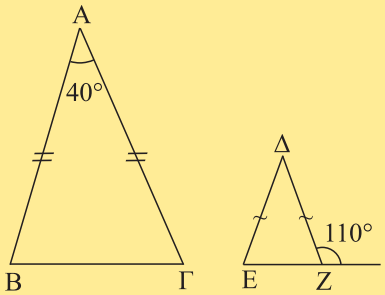
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

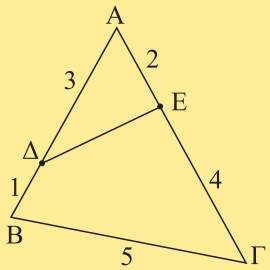
1. *i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;*
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;

2. *Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;*

3. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 3ΔΕ. Να βρεθεί ο λόγος* $\frac{EZ}{BΓ}$.

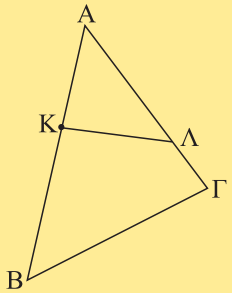


4. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔΕ.*

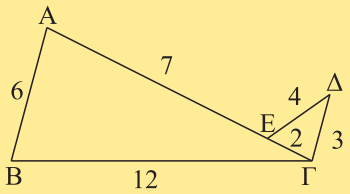


5. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm και 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;*

6. *Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;*



7. *Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\angle$). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

ii) ΑΓ·ΕΔ = ΑΒ·ΕΓ.

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

ii) ΒΓ = 3ΔΕ.

3. *Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α,β,γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;*

4. *Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.*

5. *Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι :*

i) $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$,

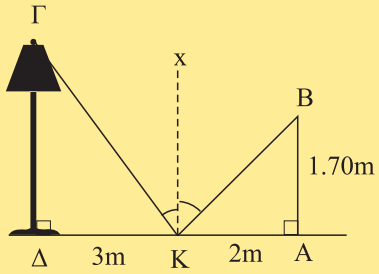
ii) $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$,

iii) $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ και τέμνουν τη ΒΓ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι*
$ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ=3m, ΑΚ=2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).*



2. *Να αποδείξετε ότι:*

i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,

ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. *Θεωρούμε τους κύκλους (O_1,R_1) και (O_2,R_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα A_1 και A_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.*

4. *Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι*

$$HΔ \cdot HA = HB \cdot HE = HΓ \cdot HZ.$$

5. *Από το μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ φέρουμε τις χορδές ΜΔ και ΜΖ, που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα Δ' και Ζ' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι*

$$MΔ \cdot MΔ' = MZ \cdot MZ'.$$

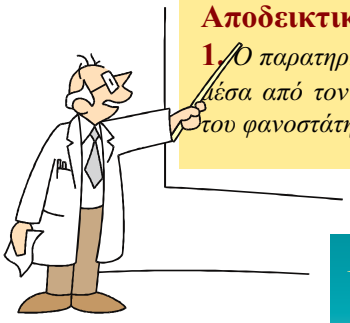
6. *Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{Δ} = 1\angle$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.*

2. *Έστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ. Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα Ο και Μ τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\frac{MB}{MΓ} = \frac{d}{d'}$, όπου d, d' είναι οι αποστάσεις του Μ από τις Ox, Oy , αντίστοιχα.*

3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\angle$) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει το ΑΔ*



στο Ζ και η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΖΕ//ΑΒ.

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1\angle$ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2=\Delta B\cdot\Delta\Gamma$.*

5. *Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι :*
i) $AB\cdot A\Gamma=A\Delta\cdot AE$,
ii) $EB^2=EA\cdot E\Delta$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω δοσμένος κύκλος (Ο,R) και σημείο Α στο εξωτερικό του κύκλου. Από το Α φέρουμε την εφαπτομένη ΑΤ και την τέμνουσα ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι* $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.

2. *Από σημείο Α φέρουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ κύκλου (Ο,R) και τυχαία τέμνουσα ΑΔΕ. Να αποδειχθεί ότι $B\Delta\cdot\Gamma E=BE\cdot\Gamma\Delta$.*

3. *Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των κορυφών Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ (με $\beta\neq\gamma$) στη διχοτόμο του ΑΔ να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Δ.*

4. *Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου ΑΓ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.*

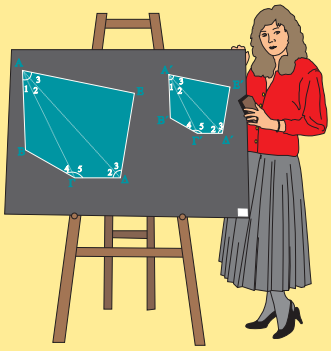
5. *Αν Μ τυχαίο σημείο κύκλου (Ο,R), να αποδείξετε ότι :*
i) η απόσταση d του Μ από χορδή ΑΒ του κύκλου είναι $d=\frac{MA\cdot MB}{2R}$,
ii) η απόσταση d΄ του Μ από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Α του κύκλου είναι $d'=\frac{MA^2}{2R}$,
iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του Μ από μία χορδή ΓΔ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2=d_1\cdot d_2$.

6. ***Θεώρημα Πτολεμαίου:*** *Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του.*

Δραστηριότητες

1. *Να κατασκευασθούν δύο τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες μία προς μία, αλλά δεν είναι όμοια.*

2. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να κατασκευασθεί τετράπλευρο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ το οποίο να αποτελείται από τρίγωνα ίσα με τα τρίγωνα στα οποία χωρίζει η διαγώνιος ΑΓ το ορθογώνιο έτσι, ώστε το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ να μην είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.*



Εργασία

Κατασκευάστε έναν εξάντα και υπολογίστε το ύψος μίας πολυκατοικίας στη γειτονιά σας ακολουθώντας τη διαδικασία της εφαρμογής 2.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

- **Ανάλογες πλευρές**
- **Ίσες γωνίες**

• Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

• Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων

- **Δύο ίσες γωνίες**
- **Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες**
- **Τρεις πλευρές ανάλογες**

• Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομόλογων στοιχείων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

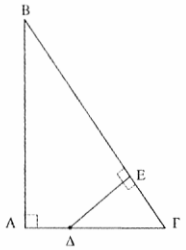
- Για να είναι όμοια δυο τρίγωνα αρκεί να ισχύει ένα από τα παρακάτω:
  i) Να έχουν 2 γωνίες ίσες μία προς μία. (**Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 1).
  ii) Να έχουν δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (**Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 2).
  iii) Να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες (**Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 3).

- Για να είναι όμοια δύο κυρτά πολύγωνα πρέπει να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές ίσες.
  (**Ασκήσεις:** Αποδεικτικές 2, Σύνθετα 1).

- Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα(Εφαρμογή 2 §8.2).
  (**Ασκήσεις:** Εμπέδωσης 4, Αποδεικτικές 1).

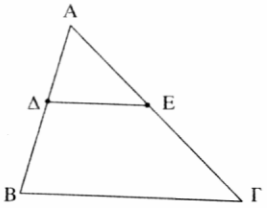
Σχόλιο: *Στην άσκηση 4, (Εμπέδωσης) υπολογίζουμε το ύψος ενός δέντρου, μετρώντας τη σκιά του. Αρχαίοι συγγραφείς αναφέρουν ότι με τον τρόπο αυτό ο Θαλής υπολόγισε το ύψος των πυραμίδων.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης



1. i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν **δύο γωνίες ίσες** ($\hat{A} = \hat{E} = 90°$, $\hat{\Gamma}$ κοινή), άρα είναι όμοια.

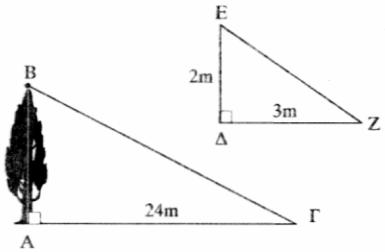
ii) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια έχουμε: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma \cdot \Delta E = AB \cdot E\Gamma$.



2. i) Έχουμε $A\Delta = \frac{1}{3}AB \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$ και $\Gamma E = \frac{2}{3}A\Gamma$, οπότε $AE = \frac{1}{3}A\Gamma \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$.
Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια γιατί έχουν και τη γωνία $\hat{A}$ κοινή.

ii) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, έχουμε: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$, οπότε $B\Gamma = 3\Delta E$

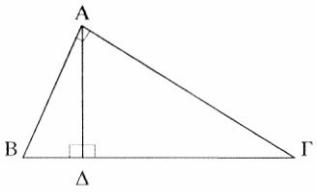
3. Αν α΄, β΄ και γ΄ είναι οι πλευρές μετά τη διαστολή, από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\alpha' = \alpha + \frac{1}{15}\alpha \Leftrightarrow \alpha' = \frac{16}{15}\alpha$, $\beta' = \beta + \frac{1}{15}\beta \Leftrightarrow \beta' = \frac{16}{15}\beta$ και $\gamma' = \gamma + \frac{1}{15}\gamma \Leftrightarrow \gamma' = \frac{16}{15}\gamma$. Άρα $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}\left(= \frac{16}{15}\right)$. Επομένως το τρίγωνο με πλευρές α΄, β΄ και γ΄ είναι όμοιο προς το αρχικό, αφού έχουν **τις πλευρές τους ανάλογες.** Άρα το τρίγωνο και μετά τη διαστολή θα παραμείνει ορθογώνιο, αφού το αρχικό τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



4. Η ακτίνα ΒΓ του ήλιου, το ύψος ΑΒ και η σκιά ΑΓ του δέντρου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Το ίδιο ισχύει για την ακτίνα ΕΖ, τη ράβδο ΔΕ και τη σκιά της ΔΖ. Επειδή, τόσο οι κατακόρυφες ΑΒ και ΔΕ, όσο και οι ακτίνες του ήλιου ΒΓ και ΕΖ είναι παράλληλες, θα είναι $\hat{B} = \hat{E}$ (οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές). Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια, οπότε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. Με αντικατάσταση των δεδομέ-

νων έχουμε: $\frac{AB}{2m} = \frac{24m}{3m} \Leftrightarrow AB = 16m$.

5. i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια (ορθογώνια και $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).



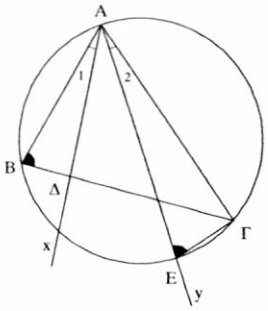
Άρα $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta B}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

ii) και iii) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, $\hat{B}$ κοινή). Άρα $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$,

οπότε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ και

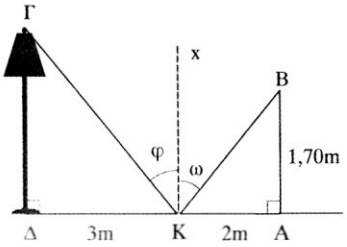
$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot B\Gamma$

6. Έχουμε τριγ. ΑΒΔ όμοιο με τριγ. ΑΕΓ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B} = \hat{E}$ γιατί βαίνουν στο τόξο ΑΓ). Άρα $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow$ $A\Delta \cdot AE = AB \cdot A\Gamma$.



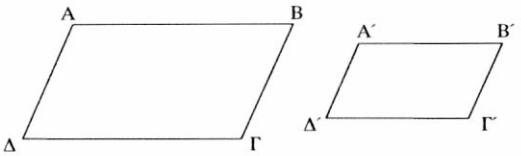
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Επειδή φ = ω θα είναι και $\Delta\hat{K}\Gamma = A\hat{K}B$ (συμπληρωματικές ίσων γωνιών). Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΚΓ και ΑΚΒ είναι όμοια, οπότε: $\frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{\Delta K}{AK}$.



Με αντικατάσταση των δεδομένω προκύπτει ότι: $\frac{\Delta\Gamma}{1,7m} = \frac{3m}{2m} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{5,1}{2}m \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2,55m$.

2. i) Έστω τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με $\frac{AΔ}{A'Δ'} = \frac{AB}{A'B'}$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Επειδή ΒΓ = ΑΔ, Β΄Γ΄ = Α΄Δ΄, ΔΓ = ΑΒ και Δ΄Γ΄ = Α΄Β΄ θα είναι

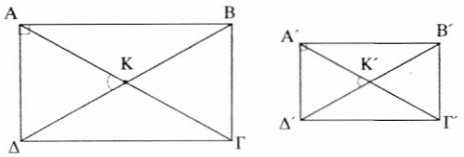


$$\frac{AΔ}{A'Δ'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} \quad (1)$$

Επίσης, επειδή $\hat{Γ} = \hat{A}$ και $\hat{Γ}' = \hat{A}'$ θα είναι $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$, οπότε και $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{Δ} = \hat{Δ}'$ (2) ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια.

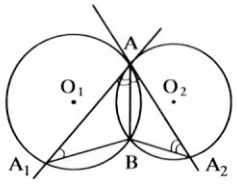
ii) Επειδή $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$ σύμφωνα με το (Ι) αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AΔ}{A'Δ'} = \frac{AB}{A'B'}$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΆ΄Δ΄ είναι όμοια (αφού $\hat{K} = \hat{K}'$).

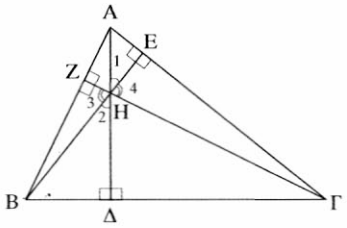
Άρα $\frac{AΔ}{A'Δ'} = \frac{KA}{K'A'}$ (1). Το ίδιο ισχύει για τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΆ΄Β΄. Άρα $\frac{AB}{A'B'} = \frac{KA}{K'A'}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{AΔ}{A'Δ'} = \frac{AB}{A'B'}$.

3. Τα τρίγωνα ABA_1 και ABA_2 είναι όμοια, γιατί $\hat{A}_1 = B\hat{A}A_2$ και $\hat{A}_2 = B\hat{A}A_1$ (γωνίες από χορδή και εφαπτόμενη).



Άρα $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BA_1}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.

4. Έχουμε τριγ. ΗΑΕ όμοιο με τριγ. ΗΒΔ ($\hat{Δ} = \hat{E} = 90°$, $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$).



Άρα $\frac{HΔ}{HE} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow HΔ \cdot HA = HB \cdot HE$ (1)

Επίσης τριγ. ΗΒΖ όμοιο με τριγ. ΗΕΓ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$, $\hat{H}_3 = \hat{H}_4$).

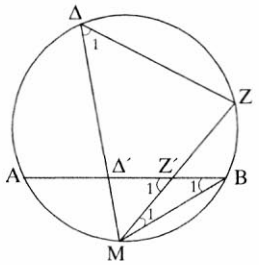
Άρα $\frac{HB}{HΓ} = \frac{HZ}{HE} \Leftrightarrow HB \cdot HE = HΓ \cdot HZ$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $HB \cdot HA = HB \cdot HE = HΓ \cdot HZ$.

5. Έχουμε $\hat{Z}'_1 = \hat{M}_1 + \hat{B}_1$ (εξωτερική στο $\overset{\Delta}{MBZ'}$)

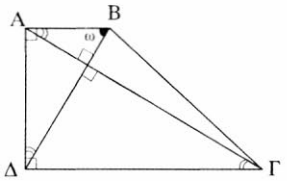
$$\hat{Z}'_1 = \frac{\overset{\frown}{BZ}}{2} + \frac{\overset{\frown}{MA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BZ}}{2} + \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MZ}}{2} = \hat{\Delta}_1$$

Άρα τριγ. ΜΔΖ όμοιο με τριγ. ΜΔ΄Ζ΄ ($\hat{M}$ κοινή, $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$), οπότε $\frac{M\Delta'}{MZ} = \frac{MZ'}{M\Delta} \Leftrightarrow M\Delta \cdot M\Delta' = MZ \cdot MZ'$.



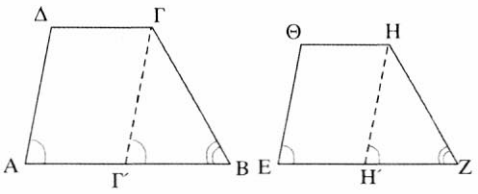
6. Επειδή το ύψος είναι το ΑΔ αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.

Αν $A\hat{B}\Delta = \omega$, τότε $A\hat{\Delta}B = 90° - \omega$ και $\Delta\hat{\Gamma}A = 90° - \omega$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΑΓ είναι όμοια, άρα: $\frac{AB}{\Delta A} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ ή $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.



Σύνθετα Θέματα

1. Θεωρούμε τα τραπέζια ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΕΖΗΘ (ΕΖ//ΗΘ) με $\frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H}$ και $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{Z}$.



Έστω ΑΒ > ΓΔ, οπότε θα είναι και ΕΖ>ΘΗ, αφού $\frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H}$.

Φέρουμε ΓΓ΄//ΔΑ και ΗΗ΄//ΘΕ.

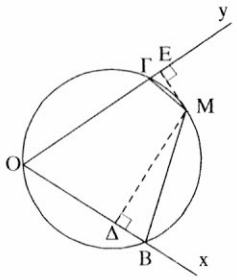
Τότε τα τρίγωνα ΒΓΓ΄ και ΖΗΗ΄ είναι όμοια ($\hat{B} = \hat{Z}$, $\hat{\Gamma}' = \hat{A} = \hat{E} = \hat{H}'$), οπότε

$$\frac{\Gamma'B}{H'Z} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Gamma'}{HH'} = \frac{\Delta A}{\Theta E} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε $\frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{AB - \Delta\Gamma}{EZ - \Theta H} = \frac{\Gamma'B}{H'Z}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{\Delta A}{\Theta E}$, δηλαδή οι πλευρές του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του ΕΖΗΘ. Επιπλέον, έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{E}$, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{\Theta}$ και $\hat{B} = \hat{Z}$, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{H}$). Άρα τα τραπέζια είναι όμοια.

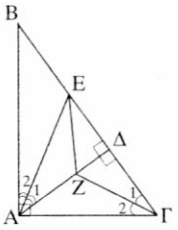
2. Έστω ΜΔ = d και ΜΕ = d΄. Το τετράπλευρο ΟΒΜΓ είναι εγγράψιμο, οπότε $M\hat{\Gamma}E = \hat{B}$. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΓΕ και ΒΜΔ είναι όμοια, οπότε: $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{ME} \Leftrightarrow \frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$.



3. Στο τρίγωνο ΑΓΔ, επειδή η ΓΖ είναι διχοτόμος έχουμε: $\frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΒΔ, επειδή η ΑΕ είναι διχοτόμος έχουμε: $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$ (2)

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια (ορθογώνια και $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$), οπότε $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{EB}{E\Delta}$, οπότε από το αντίστροφο του Θαλή στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε ότι ΖΕ//ΑΒ.

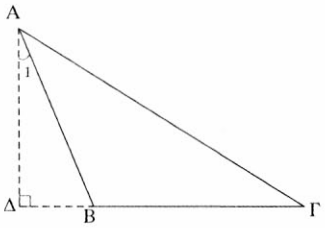


4. Από την υπόθεση έχουμε ότι: $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{B} = 90° + \hat{\Gamma}$ (1).

Αλλά $\hat{B} = 90° + \hat{A}_1$ (2) (ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ).

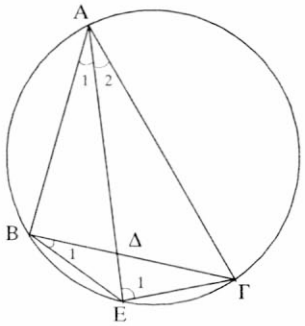
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια, οπότε:

$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.



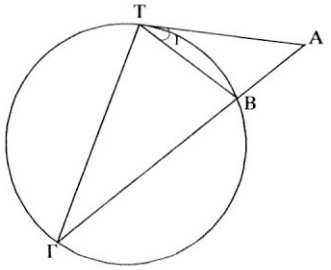
5. i) Έχουμε τριγ. ΑΒΔ όμοιο με τριγ. ΑΕΓ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B} = \hat{E}_1$ γιατί βαίνουν στο $\overset{\frown}{A\Gamma}$). Άρα $\frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$.

ii) Έχουμε τριγ. ΑΒΕ όμοιο με τριγ. ΒΔΕ ($\hat{E}$ κοινή, $\hat{B}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_1$). Άρα $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{EA}{EB} \Leftrightarrow EB^2 = EA \cdot E\Delta$.



Γενικές Ασκήσεις

1. Έχουμε τριγ. ΑΒΤ όμοιο με τριγ. ΑΓΤ ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{\Gamma} = \hat{T}_1$). Άρα $\frac{TB}{T\Gamma} = \frac{AT}{A\Gamma} = \frac{AB}{AT}$ (1)

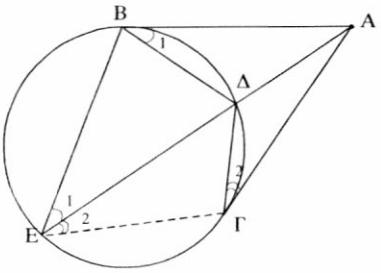


Επομένως

$$\frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{AT^2}{A\Gamma^2} \Leftrightarrow \frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{AT}{A\Gamma} \cdot \frac{AT}{A\Gamma} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{\cancel{A}T}{A\Gamma} \cdot \frac{AB}{\cancel{A}T} \Leftrightarrow \frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

2.. Έχουμε τριγ. ΑΒΔ όμοιο με τριγ. ΑΒΕ ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$). Άρα $\frac{BE}{B\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$ (1) και



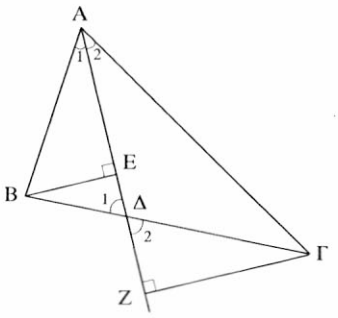
$A\Delta\Gamma \approx AE\Gamma$ ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{E}_2 = \hat{\Gamma}_2$). Άρα

$\frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$ (2).

Από (1), (2) επειδή ΑΒ = ΑΓ προκύπτει ότι

$\frac{BE}{B\Delta} = \frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow B\Delta \cdot \Gamma E = BE \cdot \Gamma\Delta$

3. Έχουμε τριγ. ΒΔΕ όμοιο με τριγ. ΓΔΖ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ κατά κορυφήν). Άρα



$\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ (1)

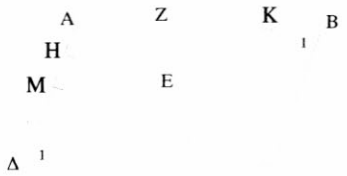
και $A\overset{\Delta}{B}E \approx A\overset{\Delta}{\Gamma}Z$ ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$).

Άρα $\frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι

$\frac{AE}{AZ} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{EA}{E\Delta} = \frac{ZA}{Z\Delta}$. Άρα τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Δ.

4. Έστω Ε σημείο της ΑΓ και ΕΖ⊥ΑΒ, ΕΗ⊥ΑΔ.
Φέρουμε ΓΚ⊥ΑΒ και ΓΜ⊥ΑΔ. Τότε ΕΗ//ΜΓ,



οπότε $\frac{ΕΗ}{ΜΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ και ΕΖ//ΚΓ, οπότε

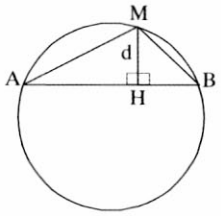
$\frac{ΕΖ}{ΚΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Άρα $\frac{ΕΗ}{ΜΓ} = \frac{ΕΖ}{ΚΓ} \Leftrightarrow \frac{ΕΗ}{ΕΖ} = \frac{ΜΓ}{ΚΓ}$ (1)

Αλλά τριγ. ΓΜΔ όμοιο με τριγ. ΚΒΓ
$(\hat{K} = \hat{M} = 90°,\ \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1)$, οπότε

$\frac{ΜΓ}{ΚΓ} = \frac{ΔΓ}{ΒΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{ΕΗ}{ΕΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$.

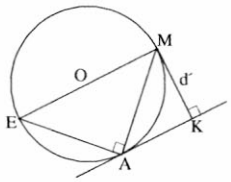
5. i) Ισχύει $MA \cdot MB = 2R \cdot MH$ (εφαρμογή $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$).



Άρα $MH = d = \frac{MA \cdot MB}{2R}$

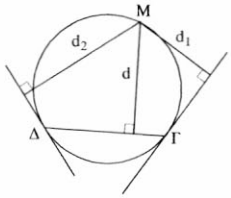
ii) Φέρνουμε τη διάμετρο ΜΕ. Τότε $M\hat{A}E = 90°$ και
$\hat{E} = \hat{A}_1$ (χορδή, εφαπτομένη).
Άρα τριγ. ΜΑΕ όμοιο με τριγ. ΜΑΚ, οπότε

$\frac{MA}{MK} = \frac{ME}{MA} \Leftrightarrow \frac{MA}{d'} = \frac{2R}{MA} \Leftrightarrow d' = \frac{MA^2}{2R}$.

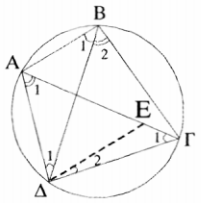


iii) Είναι $d = \frac{MΓ \cdot MΔ}{2R}$, $d_1 = \frac{MΓ^2}{2R}$, $d_2 = \frac{MΔ^2}{2R}$.

Άρα $d_1 \cdot d_2 = \frac{MΓ^2 \cdot MΔ^2}{(2R)^2} = d^2$.



6. Πρέπει να αποδείξουμε ότι
$AB \cdot ΓΔ + AΔ \cdot BΓ = AΓ \cdot BΔ$.
Παίρνουμε σημείο Ε της ΑΓ ώστε $E\hat{Δ}Γ = A\hat{Δ}B$ (1)
Τότε τριγ. ΑΒΔ όμοιο με τριγ. ΔΕΓ $(\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2,\ \hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1)$.



Άρα $\frac{AB}{E\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = E\Gamma \cdot B\Delta$ (2)

Επίσης τριγ. ΑΔΕ όμοιο με τριγ. ΒΓΔ

($\hat{A}_1 = \hat{B}_2$, $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}\Gamma$ ως διαφορά ή άθροισμα ίσων γωνιών).

Άρα $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{AE}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta \cdot B\Gamma = AE \cdot B\Delta$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει ότι:

$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = B\Delta \cdot (E\Gamma + AE) = B\Delta \cdot A\Gamma$